Skala na mapach i planach

Przedmowa

Niniejsze opracowanie jest napisanie z myślą o uczniach klasy IV szkoły podstawowej. Omówiona została w nim skala pomniejszająca i powiększająca, ale tylko w takim ujęciu, w jakim występuje ona na mapach i planach. Skala z jaką można się spotkać przy podobieństwie oraz jednokładności figur będzie tu tylko wspomniana. Skupiłem się głównie na skali, którą można zapisywać przy pomocy dwukropka.

Końcowe tematy poświęciłem uczniom którzy już skończyli klasę IV szkoły podstawowej i umieją posługiwać się ułamkami dziesiętnymi. Są tam też rozwiązane zdania na poziomie gimnazjum (wykorzystujące proporcje) oraz ćwiczenia do samodzielnego rozwiązania.

Spis tematów

Temat: Pojęcie skali liczbowej.

Na początek zauważ, że gdy nauczyciel rysuje cokolwiek na tablicy, to Ty przerysowujesz dokładnie to co on narysował, ale w pewnym pomniejszeniu. Jeśli nie zastosujesz pomniejszenia, to rysunek przez niego wykonany na tablicy nie zmieści Ci się do zeszytu — to chyba oczywiste, prawda? Sporadycznie może zdarzyć się i tak, że np. na lekcji przyrody będziesz coś oglądać np. pod mikroskopem, a potem trzeba będzie to coś narysować np. w zeszycie — czyli w powiększeniu, zgadza się? Mówiąc krótko przerysowując cokolwiek, zazwyczaj stosujesz albo pomniejszenie albo powiększenie. No właśnie tym, tj. pomniejszaniem lub powiększaniem będziemy zajmować się w tym opracowaniu. Na początek zapoznajmy się z tym co to jest skalowanie oraz skala.

Skalowanie — pomniejszanie lub powiększanie czegoś.

Skala — liczba oznaczająca ile razy coś pomniejszyliśmy lub powiększyliśmy.

W matematyce wyróżniamy zasadniczo dwie skale: pomniejszającą oraz powiększającą. Jest też coś takiego co zwie się „skala identycznościowa” (rysujemy to co widzimy bez zmieniania wymiarów), ale terminu tego w zasadzie się nie używa.

Skalę zazwyczaj zapisuje się przy pomocy dwukropka oraz liczby 1. Jeśli liczba 1 stoi przed dwukropkiem to skalę nazywamy pomniejszającą. Jeśli zaś liczba 1 stoi za dwukropkiem, to skalę nazywamy powiększającą.

Przykłady skal liczbowych:		Wymowa:
1 : 2	— skala pomniejszająca rzeczywiste wymiary dokładnie 2 razy;	„Jeden do dwóch.”
1 : 10	— skala pomniejszająca rzeczywiste wymiary dokładnie 10 razy;	„Jeden do dziesięciu.”
1 : 15	— skala pomniejszająca rzeczywiste wymiary dokładnie 15 razy;	„Jeden do piętnastu.”
1 : 1000	— skala pomniejszająca rzeczywiste wymiary dokładnie 1000 razy;	„Jeden do tysiąca.”
5 : 1	— skala powiększająca rzeczywiste wymiary dokładnie 5 razy;	„Pięć do jednego.”
18 : 1	— skala powiększająca rzeczywiste wymiary dokładnie 18 razy;	„Osiemnaście do jednego.”
1000 : 1	— skala powiększająca rzeczywiste wymiary dokładnie 1000 razy;	„Tysiąc do jednego.”

Ćwiczenie: Która z poniższych skal liczbowych jest pomniejszająca? Ile razy?

a) 1 : 8 b) 8 : 1 c) 13 : 1 d) 1 : 25 e) 1 : 100000 f) 100 : 1 g) 1 : 18000

Odp. Skale pomniejszające to: a) 8 razy, d) 25 razy, e) 100000 razy, g) 18000 razy.

Ćwiczenie: Która z poniższych skal liczbowych jest powiększająca? Ile razy?

a) 1 : 15 b) 1 : 60 c) 40 : 1 d) 100 : 1 e) 1 : 500000 f) 1 : 800 g) 1000 : 1

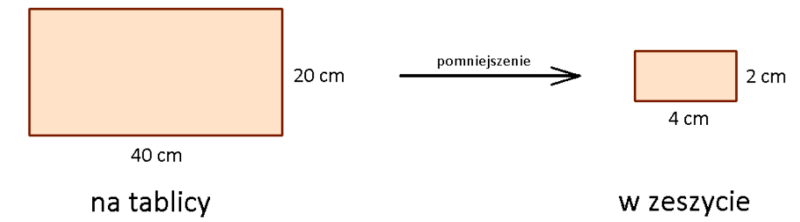
Odp. Skale powiększające to: c) 40 razy, d) 100 razy, g) 1000 razy.

Skoro już mniej więcej wiesz co to jest skala, jak się ją zapisuje i czyta, więc omówię ją teraz bardziej szczegółowo.

Temat: Skala pomniejszająca.

Rysowanie figur w zadanej skali pomniejszającej

Przypuśćmy, że nauczyciel narysował na tablicy prostokąt o wymiarach 40 cm × 20 cm. Tobie oczywiście taki prostokąt nie zmieści się do zeszytu, więc go pomniejszasz i rysujesz o wymiarach powiedzmy 4 cm × 2 cm.

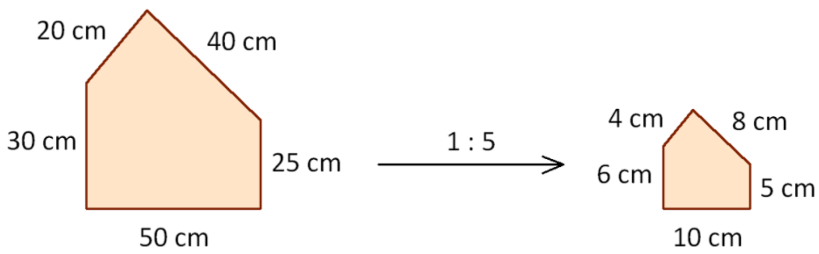


Prostokąt narysowany na tablicy ma dwa boki po 40 cm i dwa boki po 20 cm. U Ciebie w zeszycie ten zminiaturyzowany prostokąt ma dwa boki po 4 cm i dwa boki po 2 cm. Zatem każdy bok prostokąta który jest na tablicy (a nie tylko te dwa przy których jest napisana długość) został zmniejszony i to dokładnie 10 razy.

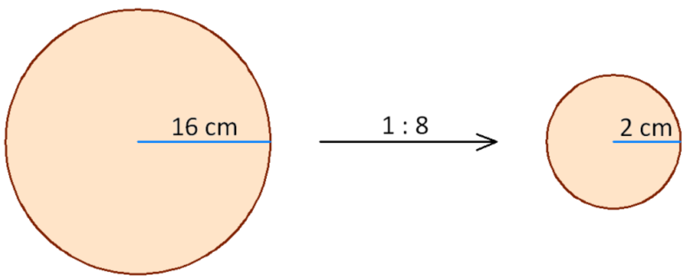
Spostrzeżenie: Przerysowując prostokąt z tablicy do zeszytu podzielono długości jego boków przez liczbę 10.

Wniosek: Prostokąt w Twoim zeszycie został narysowany w skali 1 : 10 (jeden do dziesięciu).

Zobacz teraz jak wygląda rysowanie innych figur geometrycznych w podanej skali pomniejszającej.



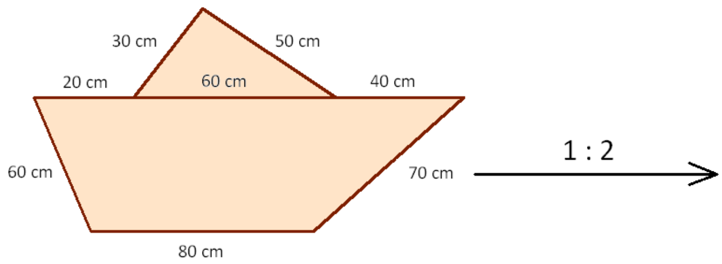
Jak widzisz z powyższego rysunku, obie figury mają taki sam kształt, a pomniejszenie figury polega na podzieleniu długości wszystkich jej boków przez liczbę która jest w skali za dwukropkiem oraz na pozostawieniu bez zmian jednostek długości. Zobacz inne przykłady:



Spostrzeżenie: Koła nie mają boków, a mimo to można wykonywać je w skali pomniejszającej. Aby móc wykonać koło w zadanej skali pomniejszającej, wystarczy poprawnie zmniejszyć długość jego promienia.

Wniosek: Skalować możemy także linie krzywe, a nie tylko odcinki.

Ćwiczenie: Narysuj szkic poniższej figury oraz podaj długości wszystkich jej boków w zadanej skali.



Odp. (Od dołu przeciwnie do ruchu wskazówek zegara): 40 cm, 35 cm, 20 cm, 25 cm, 15 cm, 10 cm, 30 cm; 30 cm.

Obliczanie długości odcinka po zastosowaniu skali pomniejszającej

Ponieważ wykonywanie figur w skali pomniejszającej na ogół sprowadza się tylko do pomniejszania długości odcinków, więc od teraz skupiać się będę głównie na odcinkach.

Zobacz. Jeśli w rzeczywistości masz odcinek o długości np. 400 cm (długość pokoju), to aby obliczyć jego długość w skali 1 : 100 musisz, te 400 cm podzielić przez liczbę która stoi za dwukropkiem tj. przez liczbę 100.

400 cm $\xrightarrow{1:100}$ 4 cm

w rzeczywistości — po zastosowaniu skali

Dzieląc czerwoną liczbę przez niebieską dostajesz 4 cm, czyli długość tego odcinka po zastosowaniu skali 1 : 100. Jednostkę zostawiasz bez zmian. Jeśli chcesz, to dodatkowo otrzymany wynik możesz zamienić na inną jednostkę np. na milimetry.

Proste, prawda? Oto inne przykłady:

w rzeczywistości	skala	po zastosowaniu skali
10 mm	1 : 5	2 mm
30 dm	1 : 6	5 dm
18 m	1 : 3	6 m

Krótkie podsumowanie:

Jeśli znasz długość odcinka w rzeczywistości, to w celu obliczenia jego długości po zastosowaniu skali pomniejszającej, musisz jego rzeczywistą długość (tę po lewej stronie strzałki) podzielić przez liczbę która stoi w skali za dwukropkiem, a jednostkę pozostawić bez zmian.

Ćwiczenie: Uzupełnij brakujące miejsca.

w rzeczywistości	skala	po zastosowaniu skali	w rzeczywistości	skala	po zastosowaniu skali	w rzeczywistości	skala	po zastosowaniu skali
6 mm	1 : 2	…	8 dm	1 : 4	…	18 m	1 : 6	…
8 mm	1 : 8	…	15 dm	1 : 3	…	14 m	1 : 14	…
12 mm	1 : 4	…	14 dm	1 : 7	…	15 m	1 : 5	…

Odp. (pionowo): 3 mm, 1 mm, 3 mm, 2 dm, 5 dm, 2 dm, 3 m, 1 m, 3 m.

Weźmy teraz inną długość odcinka niż poprzednio i inną skalę. Niech teraz jakiś odcinek w rzeczywistości ma długość powiedzmy 600 m (niech będzie to np. długość ulicy). Zastanów się jaką długość będzie on mieć po narysowaniu w skali np. 1 : 10000.

Na początek robisz schemat pokazujący to, co już wiemy:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{600\text{ m}} \xrightarrow{1:10000} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{?}$$

Na pierwszy rzut oka nie możesz jak poprzednio zastosować dzielenia liczby 600 m przez 10000, bo liczba 600 jest mniejsza od liczby 10000. Możesz jednak zwiększyć liczbę 600 zamieniając jednostkę która jest przy niej (w tym przypadku są to metry) na jednostkę mniejszą np. na centymetry. Przypomnij sobie, że:

$$1\text{ m} = 100\text{ cm}$$

Zauważ, że przy zamianie metrów na centymetry, cyfra 1 jest po obu stronach znaku równości, ale dodatkowo po stronie prawej pojawiły się dwa zera. Oznacza to, że zamieniając metry na centymetry musisz do danej liczby dopisać dwa zera. Zatem naszą liczbę tj. 600 m możesz zapisać w postaci: 60000 cm (zauważ nową jednostkę i dopisanie dwóch zer). Masz więc:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{60000\text{ cm}} \xrightarrow{1:10000} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{?}$$

Teraz już możesz podzielić liczbę z lewej strony strzałki przez liczbę stojącą za dwukropkiem. Robiąc tak masz: $60000\text{ cm} : 10000 = 6\text{ cm}$, a to oznacza, że po prawej stronie strzałki, zamiast znaku zapytania, musisz wpisać liczbę 6 cm.

Także proste, prawda? Prześledź więc inne przykłady, pamiętając o tym, że $1\text{ cm} = 10\text{ mm}$ oraz $1\text{ dm} = 10\text{ cm}$.

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\underbrace{10\text{ cm}}_{100\text{ mm}}} \xrightarrow{1:25} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{4\text{ mm}} \quad\Big|\quad \underset{\text{w rzeczywistości}}{\underbrace{24\text{ dm}}_{240\text{ cm}}} \xrightarrow{1:120} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{2\text{ cm}} \quad\Big|\quad \underset{\text{w rzeczywistości}}{\underbrace{18\text{ m}}_{18000\text{ mm}}} \xrightarrow{1:1000} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{18\text{ mm}}$$

Krótkie podsumowanie:

> Jeśli znasz długość odcinka w rzeczywistości i nie jesteś w stanie podzielić jego długości przez liczbę stojącą za dwukropkiem, to najpierw rzeczywistą długość tego odcinka (tę po lewej stronie strzałki) wyraź w mniejszej jednostce, a dopiero potem wykonaj dzielenie nowej liczby przez liczbę stojącą za dwukropkiem.

Ćwiczenie: Uzupełnij brakujące miejsca.

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\underbrace{6\text{ cm}}_{\ldots\ldots\ldots\text{mm}}} \xrightarrow{1:15} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots} \quad\Big|\quad \underset{\text{w rzeczywistości}}{\underbrace{1\text{ m}}_{\ldots\ldots\ldots\text{mm}}} \xrightarrow{1:250} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots} \quad\Big|\quad \underset{\text{w rzeczywistości}}{\underbrace{5\text{ cm}}_{\ldots\ldots\ldots}} \xrightarrow{1:10} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots}$$

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\underbrace{8\text{ dm}}_{\ldots\ldots\ldots\text{mm}}} \xrightarrow{1:400} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots} \quad\Big|\quad \underset{\text{w rzeczywistości}}{\underbrace{1\text{ m}}_{\ldots\ldots\ldots}} \xrightarrow{1:50} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots} \quad\Big|\quad \underset{\text{w rzeczywistości}}{\underbrace{5\text{ dm}}_{\ldots\ldots\ldots}} \xrightarrow{1:100} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots}$$

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\underbrace{6\text{ dm}}_{\ldots\ldots\ldots\text{cm}}} \xrightarrow{1:12} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots} \quad\Big|\quad \underset{\text{w rzeczywistości}}{\underbrace{1\text{ km}}_{\ldots\ldots\ldots}} \xrightarrow{1:1000} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots} \quad\Big|\quad \underset{\text{w rzeczywistości}}{\underbrace{5\text{ m}}_{\ldots\ldots\ldots}} \xrightarrow{1:1000} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots}$$

Odp. (pionowo): 4 mm, 2 mm, 5 cm, 4 mm, 2 cm, 1 m, 5 mm, 5 mm, 5 mm.

Jak widać, bawiąc się skalą pomniejszającą, tak naprawdę bawisz się dzieleniem liczb i przy okazji możesz poćwiczyć zamianę jednostek długości oraz wykonywanie dzielenia pisemnego (o ile w pamięci nie potrafisz podzielić dwóch liczb). Kontynuujmy.

Czasami może się zdarzyć i tak, że długość odcinka w rzeczywistości będzie wyrażona za pomocą np. dwóch jednostek, czyli w tzw. jednostce dwumianowanej. Zobacz przykład:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{1\text{ m }2\text{ cm}} \xrightarrow{1:3} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{?}$$

No i znowu pojawia się pytanie jak obliczyć liczbę po prawej stronie strzałki, bo ani liczby 1 ani liczby 2 nie umiesz zapewne jeszcze dzielić przez 3. Umiesz za to zamieniać jednostki. Zobacz, że w tym przypadku masz metry i centymetry. Spośród tych dwóch jednostek mniejsze są centymetry. Zamień więc $1\text{ m }2\text{ cm}$ na centymetry, bo są one mniejsze niż metry. Ponieważ $1\text{ m} = 100\text{ cm}$, więc $1\text{ m }2\text{ cm} = 102\text{ cm}$.

Uwaga. Pamiętaj o tym, że nie wolno przy zamienianiu długości np. $1\text{ m }2\text{ cm}$ stosować skreślania początkowej jednostki. Innymi słowy nie wolno pisać, że $1\text{ m }2\text{ cm} = 12\text{ cm}$. Takie skreślanie jest prawdziwe tylko czasami, czyli nie wolno czegoś takiego robić zawsze.

Wracamy do ostatniego przykładu. Ponieważ zamieniliśmy liczbę dwumianowaną mającą metry i centymetry na liczbę jednomianowaną tj. na mającą tylko na centymetry, więc teraz mamy:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{102\text{ cm}} \xrightarrow{1:3} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{?}$$

Postępując jak wcześniej, dzielisz liczbę z lewej strony strzałki przez liczbę stojącą za dwukropkiem. Dostajesz więc:

$$102\text{ cm} : 3 = 34\text{ cm}$$

a to oznacza, że po prawej stronie strzałki musisz wpisać liczbę 34 cm. Prześledź teraz inne przykłady, pamiętając o tym, że $1\text{ m} = 1000\text{ mm}$ oraz, że $1\text{ km} = 1000\text{ m}$ i $1\text{ dm} = 100\text{ mm}$.

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\underbrace{2\text{ m }4\text{ mm}}_{2004\text{ mm}}} \xrightarrow{1:6} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{334\text{ mm}} \qquad \underset{\text{w rzeczywistości}}{\underbrace{2\text{ dm }5\text{ mm}}_{205\text{ mm}}} \xrightarrow{1:5} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{41\text{ mm}} \qquad \underset{\text{w rzeczywistości}}{\underbrace{2\text{ km }40\text{ m}}_{2040\text{ m}}} \xrightarrow{1:8} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{255\text{ m}}$$

Ćwiczenie: Uzupełnij brakujące miejsca.

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\underbrace{1\text{ m }8\text{ mm}}_{\ldots\ldots\ldots\text{ mm}}} \xrightarrow{1:4} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots} \qquad \underset{\text{w rzeczywistości}}{\underbrace{4\text{ dm }5\text{ cm}}_{\ldots\ldots\ldots\text{ cm}}} \xrightarrow{1:15} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots} \qquad \underset{\text{w rzeczywistości}}{\underbrace{5\text{ km }80\text{ m}}_{\ldots\ldots\ldots\text{ m}}} \xrightarrow{1:40} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots}$$

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\underbrace{3\text{ m }8\text{ cm}}_{\ldots\ldots\ldots\text{ cm}}} \xrightarrow{1:4} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots} \qquad \underset{\text{w rzeczywistości}}{\underbrace{4\text{ cm }8\text{ mm}}_{\ldots\ldots\ldots\text{ mm}}} \xrightarrow{1:6} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots} \qquad \underset{\text{w rzeczywistości}}{\underbrace{3\text{ km }2\text{ m}}_{300200\text{ cm}}} \xrightarrow{1:100} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots}$$

Odp. (w pionie, po zastosowaniu skali): 252 mm, 77 cm, 3 cm, 8 mm, 127 m, 3002 cm.

Obliczanie długości odcinka w rzeczywistości w oparciu o skalę oraz jego długość po zastosowaniu skali

Do tej pory w tym temacie obliczaliśmy jaką długość będzie mieć odcinek po zastosowaniu zmniejszenia. Zróbmy teraz coś odwrotnego. Zastanówmy się jak obliczyć długość odcinka w rzeczywistości (po lewej stronie strzałki), jeśli wiemy jakie było jego pomniejszenie oraz jaka jest długość tego odcinka po tym pomniejszeniu, czyli po prawej stronie strzałki. Rozpatrzmy zatem taki przypadek:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\ldots} \xrightarrow{1:4} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{3\text{ cm}}$$

i prześledźmy to co widzimy powyżej. Widzimy to, że odcinek o jakiejś długości zmniejszono 4 razy i otrzymano odcinek o długości 3 cm. Mało tego, skoro ten pierwszy odcinek zmniejszono, to musi mieć on długość większą niż 3 cm i to 4-rokrotnie, bo taka właśnie liczba stoi za dwukropkiem. Zatem musimy te 3 cm które są za strzałką pomnożyć przez 4. Robiąc tak dostajemy: $3\text{ cm} \cdot 4 = 12\text{ cm}$. Uzupełniamy więc brakujące miejsce:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{12\text{ cm}} \xrightarrow{1:4} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{3\text{ cm}}$$

Spostrzeżenie: W każdym zadaniu ze skalą stosujemy albo dzielenie albo mnożenie. Dzielenie robimy jak chcemy pomniejszyć długość jakiegoś odcinka, zaś mnożenie wykonujemy gdy chcemy powiększyć długość danego odcinka.

Zobaczmy teraz inny przykład:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\ldots} \xrightarrow{1:8} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{2\text{ mm}}$$

Znowu brakuje długości odcinka w rzeczywistości. Skoro tę długość w rzeczywistości zmniejszyliśmy 8 razy i dostaliśmy odcinek o długości 2 mm, to teraz ten odcinek o długości 2 mm musimy powiększyć — oczywiście 8 razy, bo taka liczba stoi w skali za dwukropkiem. Robiąc tak dostajemy: $2\text{ mm} \cdot 8 = 16\text{ mm}$. Uzupełniając brakujące miejsce mamy:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{16\text{ mm}} \xrightarrow{1:8} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{2\text{ mm}}$$

Krótkie podsumowanie:

Jeśli masz skalę pomniejszającą i nie znasz długości odcinka w rzeczywistości, to długość odcinka po zastosowaniu skali (tę liczbę po prawej stronie strzałki) musisz pomnożyć przez liczbę jaka jest w skali za dwukropkiem.

Ćwiczenie: Uzupełnij brakujące miejsca.

$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\ldots} \xrightarrow{1:2} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{6\text{ mm}}$	$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\ldots} \xrightarrow{1:4} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{8\text{ dm}}$	$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\ldots} \xrightarrow{1:6} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{18\text{ m}}$
$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\ldots} \xrightarrow{1:8} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{8\text{ mm}}$	$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\ldots} \xrightarrow{1:3} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{15\text{ dm}}$	$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\ldots} \xrightarrow{1:14} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{14\text{ m}}$
$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\ldots} \xrightarrow{1:4} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{12\text{ mm}}$	$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\ldots} \xrightarrow{1:7} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{14\text{ dm}}$	$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\ldots} \xrightarrow{1:5} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{15\text{ m}}$

Odp. (pionowo): 12 mm, 64 mm, 48 mm, 32 dm, 45 dm, 98 dm, 108 m, 196 m, 75 m.

Jeśli po zastosowaniu skali pomniejszającej, powiedzmy 1 : 3 masz odcinek wyrażony za pomocą dwóch jednostek np. 2 cm 7 mm (czyli za pomocą tzw. jednostki dwumianowanej), to najpierw jego długość musisz wyrazić w jednostce jednomianowanej — najlepiej wybrać mniejszą jednostkę spośród dwóch podanych. W tym przypadku masz centymetry i milimetry. Wygodnie zatem będzie zamienić tę długość tj. 2 cm 7 mm na milimetry, bo są one mniejsze niż centymetry. Ponieważ 1 cm ma 10 mm, więc 2 cm będą mieć 20 mm, a cały odcinek tj. 2 cm 7 mm będzie mieć 27 mm. Masz więc taką sytuację:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\ldots} \xrightarrow{1:3} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\underbrace{2\text{ cm }7\text{ mm}}_{27\text{ mm}}}$$

Aby obliczyć długość tego odcinka w rzeczywistości, musisz postępować jak wcześniej tj. pomnożyć tę liczbę co jest po prawej stronie strzałki przez liczbę która jest w skali za dwukropkiem. Masz zatem:

$$27\text{ mm} \cdot 3 = 81\text{ mm}$$

czyli, po lewej stronie strzałki musisz wpisać liczbę 81 mm.

Znajdowanie skali pomniejszającej w oparciu o długości odcinków przed i po zastosowaniu skali

Przejdźmy teraz do ostatniego typu zadań ze skalą pomniejszającą. Rozpatrzmy taki przypadek w którym znamy długość odcinka w rzeczywistości oraz jego długość po zastosowaniu skali pomniejszającej np.:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{10\text{ cm}} \xrightarrow{\ldots} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{5\text{ cm}}$$

Z powyższego schematu widzisz dokładnie, że po obu stronach strzałki masz te same jednostki oraz, że nastąpiło dwukrotne zmniejszenie odcinka o długości 10 cm, czyli, że nad strzałkę musisz wpisać skalę 1 : 2. Zwróć jednak uwagę, że by dowiedzieć się o tym, że za dwukropkiem musi stać liczba 2, trzeba było wykonać dzielenie liczby większej tj. 10 cm przez liczbę mniejszą tj. przez 5 cm. Prześledź teraz inne przykłady:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{10\text{ mm}} \xrightarrow{1:5} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{2\text{ mm}} \quad \Bigg| \quad \underset{\text{w rzeczywistości}}{30\text{ dm}} \xrightarrow{1:6} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{5\text{ dm}} \quad \Bigg| \quad \underset{\text{w rzeczywistości}}{18\text{ m}} \xrightarrow{1:3} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{6\text{ m}}$$

W tego typu zadaniach może czasami zdarzyć się i tak, że po obu stronach strzałki będą różne jednostki. Wówczas musisz liczby po obu stronach strzałki wyrazić w tych samych jednostkach, a dopiero potem w celu ustalenia skali, wykonać dzielenie większej z nich przez mniejszą. Mając różne jednostki po obu stronach strzałki, wygodnie jest wybrać zamianę większej z nich na tę mniejszą co jest po drugiej stronie strzałki. Zobacz przykład:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{40\text{ cm}} \xrightarrow{\ldots} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{2\text{ dm}}$$

Nie możesz nad strzałkę wpisać skali 1 : 8, bo po obu stronach strzałki są różne jednostki. Musisz najpierw jedną z tych jednostek zamienić na drugą. Ponieważ decymetry są jednostką większą niż centymetry, więc wygodnie będzie liczbę po prawej stronie strzałki wyrazić w centymetrach, czyli w jednostce która jest po lewej stronie strzałki. Zatem powyższy przykład zmienia się w taki:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{40\text{ cm}} \xrightarrow{\ldots} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{20\text{ cm}}$$

no i teraz już widzisz, że dzieląc większą liczbę 40 cm przez 20 cm, dostajesz liczbę 2, czyli, że skala w powyższym przypadku wynosi 1 : 2. Ostatecznie masz więc:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{40\text{ cm}} \xrightarrow{1:2} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{2\text{ dm}}$$

Prześledź teraz inne przykłady:

$\underbrace{2\ \text{m}}_{200\ \text{cm}} \xrightarrow{1:10} 20\ \text{cm}$	$\underbrace{8\ \text{km}}_{8000\ \text{m}} \xrightarrow{1:4000} 2\ \text{m}$	$60\ \text{dm} \xrightarrow{1:3} \underbrace{2\ \text{m}}_{20\ \text{dm}}$
w rzeczywistości — po zastosowaniu skali	w rzeczywistości — po zastosowaniu skali	w rzeczywistości — po zastosowaniu skali

Krótkie podsumowanie:

Jeśli brakuje skali, to najpierw obie liczby wyrażasz w takich samych jednostkach, a następnie większą z nich dzielisz przez mniejszą.

Ćwiczenie: Uzupełnij brakujące miejsca.

$\underbrace{6\ \text{cm}}_{\dots\dots\dots\text{mm}} \xrightarrow{\dots} 20\ \text{mm}$	$\underbrace{1\ \text{m}}_{\dots\dots\dots\text{mm}} \xrightarrow{\dots} 250\ \text{mm}$	$\underbrace{5\ \text{cm}}_{\dots\dots\dots} \xrightarrow{\dots} 1\ \text{mm}$
w rzeczywistości — po zastosowaniu skali	w rzeczywistości — po zastosowaniu skali	w rzeczywistości — po zastosowaniu skali
$\underbrace{8\ \text{dm}}_{\dots\dots\dots\text{mm}} \xrightarrow{\dots} 4\ \text{mm}$	$\underbrace{1\ \text{m}}_{\dots\dots\dots} \xrightarrow{\dots} 20\ \text{cm}$	$\underbrace{5\ \text{dm}}_{\dots\dots\dots} \xrightarrow{\dots} 2\ \text{mm}$
w rzeczywistości — po zastosowaniu skali	w rzeczywistości — po zastosowaniu skali	w rzeczywistości — po zastosowaniu skali
$\underbrace{6\ \text{dm}}_{\dots\dots\dots\text{cm}} \xrightarrow{\dots} 3\ \text{cm}$	$\underbrace{1\ \text{km}}_{\dots\dots\dots} \xrightarrow{\dots} 500\ \text{m}$	$\underbrace{5\ \text{m}}_{\dots\dots\dots} \xrightarrow{\dots} 5\ \text{mm}$
w rzeczywistości — po zastosowaniu skali	w rzeczywistości — po zastosowaniu skali	w rzeczywistości — po zastosowaniu skali

Odp. (pionowo): 1 : 3; 1 : 200; 1 : 20; 1 : 4; 1 : 5; 1 : 2; 1 : 50; 1 : 250; 1 : 1000.

Jeśli w sytuacjach takich jak wyżej zdarzy Ci się zobaczyć jednostki dwumianowane, to nie przerażaj się, tylko zamień je na jednostki jednomianowane. Innymi słowy wybierz mniejszą jednostkę spośród podanych i postępuj jak wyżej, tj. podziel liczbę większą przez mniejszą. Zobacz przykłady:

$\underbrace{6\ \text{m}\ 8\ \text{cm}}_{608\ \text{cm}} \xrightarrow{1:19} \underbrace{3\ \text{dm}\ 20\ \text{cm}}_{32\ \text{cm}}$	$\underbrace{5\ \text{cm}\ 6\ \text{mm}}_{56\ \text{mm}} \xrightarrow{1:8} 7\ \text{mm}$	$\underbrace{4\ \text{dm}\ 2\ \text{cm}}_{420\ \text{mm}} \xrightarrow{1:20} \underbrace{2\ \text{cm}\ 1\ \text{mm}}_{21\ mm}$
w rzeczywistości — po zastosowaniu skali	w rzeczywistości — po zastosowaniu skali	w rzeczywistości — po zastosowaniu skali

Ćwiczenie: Uzupełnij brakujące miejsca.

$\underbrace{6\ \text{cm}\ 5\ \text{mm}}_{\dots\dots\dots\text{mm}} \xrightarrow{\dots} \underbrace{1\ \text{cm}\ 3\ \text{mm}}_{\dots\dots\dots\text{mm}}$	$\underbrace{8\ \text{cm}\ 8\ \text{mm}}_{\dots\dots\dots\text{mm}} \xrightarrow{\dots} \underbrace{1\ \text{cm}\ 1\ \text{mm}}_{\dots\dots\dots\text{mm}}$	$\underbrace{4\ \text{dm}\ 8\ \text{mm}}_{\dots\dots\dots\text{mm}} \xrightarrow{\dots} \underbrace{5\ \text{cm}\ 1\ \text{mm}}_{\dots\dots\dots\text{mm}}$
w rzeczywistości — po zastosowaniu skali	w rzeczywistości — po zastosowaniu skali	w rzeczywistości — po zastosowaniu skali
$\underbrace{8\ \text{dm}\ 6\ \text{cm}}_{\dots\dots\dots\text{cm}} \xrightarrow{\dots} \underbrace{4\ \text{dm}\ 3\ \text{cm}}_{\dots\dots\dots\text{cm}}$	$\underbrace{6\ \text{cm}\ 4\ \text{mm}}_{\dots\dots\dots\text{mm}} \xrightarrow{\dots} \underbrace{1\ \text{cm}\ 6\ \text{mm}}_{\dots\dots\dots\text{mm}}$	$\underbrace{4\ \text{m}\ 8\ \text{cm}}_{\dots\dots\dots\text{cm}} \xrightarrow{\dots} \underbrace{1\ \text{dm}\ 7\ \text{cm}}_{\dots\dots\dots\text{cm}}$
w rzeczywistości — po zastosowaniu skali	w rzeczywistości — po zastosowaniu skali	w rzeczywistości — po zastosowaniu skali
$\underbrace{8\ \text{m}\ 4\ \text{cm}}_{\dots\dots\dots\text{cm}} \xrightarrow{\dots} \underbrace{6\ \text{dm}\ 7\ \text{cm}}_{\dots\dots\dots\text{cm}}$	$\underbrace{3\ \text{dm}\ 2\ \text{mm}}_{\dots\dots\dots\text{mm}} \xrightarrow{\dots} \underbrace{15\ \text{cm}\ 1\ \text{mm}}_{\dots\dots\dots\text{mm}}$	$\underbrace{5\ \text{m}\ 4\ \text{cm}}_{\dots\dots\dots\text{cm}} \xrightarrow{\dots} \underbrace{4\ \text{dm}\ 2\ \text{cm}}_{\dots\dots\dots\text{cm}}$
w rzeczywistości — po zastosowaniu skali	w rzeczywistości — po zastosowaniu skali	w rzeczywistości — po zastosowaniu skali

Odp. (pionowo): 1 : 5; 1 : 2; 1 : 12; 1 : 8; 1 : 4; 1 : 2; 1 : 8; 1 : 24; 1 : 12.

Skala na mapach i planach

Aby przedstawić na kartce papieru pewien obszar np. teren miasta, trzeba ten obszar mocno pomniejszyć. W zależności od tego jak mocne będzie to pomniejszenie, będziemy mówić albo o tzw. planie, albo o tzw. mapie. Plan w przeciwieństwie do mapy będzie nam pokazywać więcej szczegółów. Nie ma jednak precyzyjnego rozgraniczenia jaka skala sprawia, że mamy do czynienia z planem, a jaka z mapą. Generalnie jest tak, że jeśli widzimy nazwy ulic (o ile ulica ma nazwę) lub budynki lub inne detale otoczenia np. mosty, wiadukty, stawy itp. to mamy do czynienia z planem. W pozostałych przypadkach mamy do czynienia z mapą.

Mapy ogólnie rzecz ujmując tworzy się po to, by móc pokazać ogólny zarys terenu. Dzięki mapom można m.in. zobaczyć rozmieszczenie miast i obliczyć odległości między nimi w linii prostej. Można też zobaczyć całe kontynenty, prognozowaną pogodę, rozkład nizin i wyżyn itp. W zależności od tego co chcemy przedstawić na mapie, stosuje się różne jej skale. Im większa liczba jest za dwukropkiem, tym większy możemy zobaczyć obszar, ale kosztem mniejszej ilości szczegółów.

Plany w przeciwieństwie do map, tworzy się po to, by móc z nich odczytać szczegóły terenu który przedstawiają. Przykładowo plany miast są robione po to, by móc dość dokładnie (np. z dokładnością do 10 m) oczytać odległość jaką trzeba będzie pokonać np. z domu do szkoły czy do pracy. Bardzo duże miasta np. Warszawę, przedstawia się na planach mających za dwukropkiem liczbę większą niż 40000. Miasta średniej wielkości przedstawia się na planach w skali około 1 : 20000, zaś miasta małe w skali około 1 : 10000.

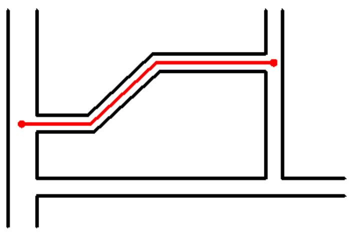
Plany działek na ogół tworzy się po to, by móc uzyskać pozwolenie od odpowiednich urzędów, np. na wybudowanie domu lub na pokazanie jak w przyszłości może wyglądać dana działka po zagospodarowaniu. Takie plany najczęściej tworzy się w skali 1 : 1000. Nie ma jednak ścisłych reguł, bo np. jeśli działka jest bardzo mała, to może być przedstawiona na planie np. w skali 1 : 400.

Plany domów robi się m.in. po to by móc dostosować rozkład pomieszczeń do własnych potrzeb oraz by móc oszacować koszty tejże budowy. Tego typu plany najczęściej sporządza się w skali 1 : 100.

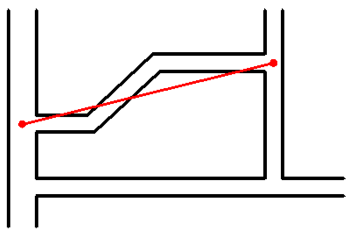
W tym opracowaniu największy nacisk położę na poprawne odczytywanie odległości na planach. Mapy pozostawię w spokoju, bo bardzo często ich zadaniem jest tylko ukazanie rozmieszczenia czegoś np. państw, miast lub temperatur.

Poniżej przedstawiam przykładowy fragment planu miasta.

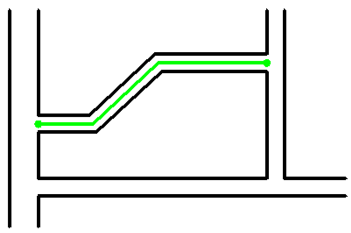
Widzisz na nim głównie ulice i ich nazwy, tereny zabudowane, budynki oraz fragment rzeki. Nie widać jednak skali. Gdybyśmy ją znali, moglibyśmy obliczać m.in. długości ulic, a co za tym idzie, moglibyśmy znać np. długość drogi z domu do pracy. Nauczmy się więc, jak poprawnie mierzyć długości ulic. Ponieważ ulica bardzo często nie jest prosta, więc mierzenie jej długości w linii prostej jest na ogół błędne. Długość ulicy trzeba mierzyć jej środkiem, ale tylko od krawędzi do krawędzi ulicy do której dotyka. Zobacz schematy:



sposób 1



sposób 2



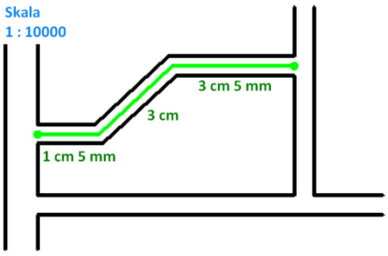
sposób 3

Sposób 1-wszy mierzy długość ulicy od środka pierwszego skrzyżowania do środka drugiego. Nie jest to poprawne, bo ulica nie zaczyna się na środku skrzyżowania. Taki sposób mierzenia jest błędny.

Sposób 2-gi mierzy długość ulicy także między środkami skrzyżowań, ale w linii prostej. Ten sposób mierzenia byłby dobry gdybyśmy chcieli obliczyć np. najkrótszą odległość jaką pokona ptak chcący przelecieć znad jednego skrzyżowania do drugiego. Człowiek oczywiście latać nie umie, więc może się poruszać tylko tak, jak „idzie” ulica, czyli po łamanej. Jeśli więc chcemy obliczyć jaką długość pokona człowiek lub samochód jadący tą ulicą, musimy zastosować inny sposób mierzenia niż ten.

Sposób 3-ci pokazuje mierzenie ulicy tak jak powinno ono wyglądać, czyli od najbliższej krawędzi z jedną ulicą do najbliższej krawędzi z drugą ulicą.

Zauważ, że w sposobie 3-cim aby zmierzyć długość ulicy trzeba było zmierzyć długości 3-ch odcinków. Aby obliczyć długość tej ulicy należy więc dodać do siebie te 3 długości i otrzymany wynik pomnożyć przez liczbę stojącą w skali za dwukropkiem. Potem już tylko wystarczy zamienić jednostki w których mierzyliśmy długość tej ulicy na metry lub kilometry. I to wszystko. Zobacz to na przykładzie:



Fragment planu który widzisz obok, wykonany jest w skali 1 : 10000. Na planie tym, długość ulicy wyróżnionej kolorem zielonym wynosi:

$$1\text{ cm }5\text{ mm} + 3\text{ cm} + 3\text{ cm }5\text{ mm} = 7\text{ cm }10\text{ mm}$$

Ponieważ 10 mm to 1 cm, więc długość tej ulicy na tym planie to dokładnie 8 cm. Aby obliczyć jej długość w rzeczywistości, wygodnie jest zrobić sobie szkic:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\ldots} \xrightarrow{1:10000} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\underbrace{7\text{ cm }10\text{ mm}}_{8\text{ cm}}}$$

Teraz już wyraźnie widzisz, że brakująca liczba po lewej stronie strzałki musi być większa od liczby po prawej stronie strzałki, bo została podzielona przez 10000 (dzielenie na ogół zmniejsza liczby) i w wyniku tego dzielenia otrzymano liczbę 8 cm. Oznacza to, że mnożąc tę pomniejszoną liczbę tj. tę po prawej stronie strzałki przez 10000 dostaniesz liczbę po lewej stronie strzałki. Zatem:

$$8\text{ cm} \cdot 10000 = 80000\text{ cm}$$

Teraz wystarczy już tylko zamienić centymetry na metry, czyli skreślić dwa ostatnie zera. Masz więc, że:

$$80000\text{ cm} = 800\text{ m}$$

Zamieniamy centymetry na metry.
Wiemy, że:
$\boxed{100\text{ cm} = 1\text{ m}}$
Widzimy, że po obu stronach jest cyfra 1, oraz to, że zniknęły dwa zera.
Zatem zamieniając centymetry na metry, należy skreślić 2 ostatnie zera.

Zatem ulica której długość na planie w skali 1 : 10000 wynosi 8 cm, w rzeczywistości ma długość 800 m.

Jak widzisz zadania dotyczące planów (także map) w zasadzie niczym nie różnią się od ćwiczeń wykonywanych na początku tego tematu. Jedyna i to niewielka różnica polega na tym, że teraz skala pomniejszająca ma za dwukropkiem duże liczby (na ogół większe niż 1000) oraz, że schemat ze strzałką trzeba sobie zrobić samemu. Wcześniej był on odgórnie narzucony przez autora ćwiczenia.

Jeśli chodzi o zadania dotyczące planów i map, to musisz jeszcze wiedzieć o jednej rzeczy. Prawie nigdy nie używa się tam sformułowania „w rzeczywistości”. Sformułowanie to zastępuje się słowami „w terenie”. Musisz jednak wiedzieć, że sformułowanie „w terenie” tyczy się tylko pomiarów odległości między dwoma punktami. Nie można więc go stosować w zadaniach wyliczających wysokość budynku czy długość mostu. Można natomiast go stosować w zadaniach dotyczących np. wymiarów działki, odległości między miastami itp. Zobacz przykłady:

Zadanie: Pan Sprytny kupił atrakcyjną działkę po dość niskiej cenie. Jego działka na planie wykonanym w skali 1 : 500 ma wymiary 6 cm × 20 cm. Jakie wymiary w terenie ma działka pana Sprytnego?

Analiza zadania:

Znasz skalę, czyli rysujesz sobie strzałkę i piszesz nad nią 1 : 500. Wracasz się do treści zadania i czytasz, że działka ta na planie ma wymiary 6 cm × 20 cm. Ponieważ są to wymiary na planie, a nie w terenie, więc piszesz je po prawej stronie strzałki. Robisz więc schemat:

$$\underset{\text{w terenie}}{\ldots} \xrightarrow{1:500} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{6\text{ cm} \times 20\text{ cm}}$$

Ponieważ skala 1 : 500 pomniejsza liczbę z lewej strony strzałki dokładnie 500 razy, więc by znaleźć tę liczbę, musisz każdą z liczb co jest po prawej stronie strzałki, pomnożyć przez liczbę stojącą za dwukropkiem, czyli przez 500.

Rozwiązanie:

$$6\text{ cm} \cdot 500 = 3000\text{ cm} = 30\text{ m}$$

$$20\text{ cm} \cdot 500 = 10000\text{ cm} = 100\text{ m}$$

> Zamieniamy centymetry na metry.
> Wiemy, że:
> $\boxed{100\text{ cm} = 1\text{ m}}$
> Widzimy, że po obu stronach jest cyfra 1, oraz to, że zniknęły dwa zera.
> Zatem zamieniając centymetry na metry, należy skreślić 2 ostatnie zera.

Odp. W terenie działka pana Sprytnego ma wymiary 30 m × 100 m.

Zadanie: Na mapie wykonanej w skali 1 : 20 000 000 odległość mierzona w linii prostej między Warszawą a Moskwą wynosi 57 mm. Ile kilometrów w terenie wynosi odległość między tymi miastami w linii prostej?

Analiza zadania:

Znasz skalę, czyli rysujesz sobie strzałkę i piszesz nad nią 1 : 20 000 000. Wracasz się do treści zadania i czytasz, że odległość na mapie wynosi 57 mm. Ponieważ jest to odległość na mapie, a nie w terenie, więc piszesz ją po prawej stronie strzałki. Robisz więc schemat:

$$\underset{\text{w terenie}}{\ldots} \xrightarrow{1:20\,000\,000} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{57\text{ mm}}$$

Ponieważ skala 1 : 20 000 000 pomniejsza liczbę z lewej strony strzałki dokładnie 20 0000 000 razy, więc by znaleźć tę liczbę, musisz tę liczbę co jest po prawej stronie strzałki, pomnożyć przez liczbę stojącą za dwukropkiem, czyli przez 20 000 000.

Rozwiązanie:

$$57\text{ mm} \cdot 20\,000\,000 = 1\,140\,000\,000\text{ mm} =$$

$$= 1\,140\,000\text{ m} = 1140\text{ km}$$

> Zamieniamy milimetry na metry.
> Wiemy, że:
> $\boxed{1000\text{ mm} = 1\text{ m}}$
> Widzimy, że po obu stronach jest cyfra 1, oraz to, że po lewej stronie zniknęły 3 zera.
> Zatem zamieniając milimetry na metry, należy skreślić 3 ostatnie zera.

> Zamieniamy metry na kilometry.
> Wiemy, że:
> $\boxed{1000\text{ m} = 1\text{ km}}$
> Widzimy, że po obu stronach jest cyfra 1, oraz to, że zniknęły 3 zera.
> Zatem zamieniając metry na kilometry, należy skreślić 3 ostatnie zera.

Odp. W terenie odległość w linii prostej między Warszawą a Moskwą wynosi 1140 km.

Zadanie: Na mapie odległość mierzona w linii prostej z Warszawy do Krakowa wynosi 11 cm 3 mm. W terenie zaś odległość ta mierzona także w linii prostej jest równa 254 km 250 m. W jakiej skali wykonana jest ta mapa?

Analiza zadania:

Nie znasz skali, ale znasz długość jaką trzeba będzie wpisać po lewej oraz po prawej stronie strzałki. Robisz więc sobie schemat:

$$\underset{\text{w terenie}}{254\text{ km }250\text{ m}} \xrightarrow{\ldots} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{11\text{ cm }3\text{ mm}}$$

Ponieważ po obu stronach strzałki nie masz tych samych jednostek, więc je ujednolicasz. Spośród 4-ch jednostek co są podane najmniejsze są milimetry, więc liczby po obu stronach strzałki zamieniasz na milimetry. Potem tak jak w zadaniach z początku tego tematu, dzielisz liczbę większą przez mniejszą i poprawnie wpisujesz skalę nad strzałkę oraz udzielasz odpowiedź.

Rozwiązanie:

$$254\text{ km }250\text{ m} = 254\,250\,000\text{ mm}$$ — Zauważ, że 1 km = 1000 m, czyli 254 km = 254 000 m. Dodając do tej liczby 250 m dostajesz 254 250 m. Ponieważ 1 m = 1000 m więc do liczby otrzymanej przed chwilą musisz jeszcze dopisać 3 zera.

$$11\text{ cm }3\text{ mm} = 113\text{ mm}$$ — Zauważ, że 1 cm = 10 mm, więc 11 cm = 110 mm. Dodając to tej liczby jeszcze 3 mm otrzymujesz 113 mm.

$$254\,250\,000\text{ mm} : 113\text{ mm} = 2\,250\,000$$

Odp. Mapa ta jest wykonana w skali 1 : 2 250 000.

Zadanie: W terenie odległość mierzona w linii prostej z Warszawy do Lublina wynosi 160 km. Ile będzie wynosić odległość między tymi miastami na mapie w skali 1 : 2 000 000 mierzona także w linii prostej?

Analiza zadania:

Znasz skalę i odległość w terenie (po lewej stronie strzałki). Robisz więc schemat:

$$\underset{\text{w terenie}}{160\text{ km}} \xrightarrow{1\,:\,2\,000\,000} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots}$$

Ponieważ liczba po lewej stronie strzałki jest mniejsza niż liczba za dwukropkiem, więc musisz ją sobie zwiększyć. Możesz to zrobić poprzez zamianę jednostki która jest przy niej na jednostkę mniejszą. W przypadku map wygodnie jest robić zamianę na milimetry lub centymetry. Zamień więc liczbę 160 km np. na centymetry, a potem otrzymany wynik podziel przez liczbę stojącą za dwukropkiem, czyli przez 2 000 000.

Rozwiązanie:

$$160\text{ km} = 16000000\text{ cm}$$ — Zauważ, że 1 km = 1000 m, czyli 160 km = 160 000 m. Ponieważ 1 m = 100 cm, więc dopisz jeszcze 2 zera.

$$16000000\text{ cm} : 2\,000\,000 = 8\text{ cm}$$

Odp. Odległość między tymi miastami na mapie w skali 1 : 2 000 000 mierzona w linii prostej wynosi 8 cm.

Ćwiczenie: Na mapie wykonanej w pewnej skali, teren Londynu to mniej więcej koło o średnicy 5 cm. W terenie zaś średnica ta wynosi ok. 50 km. W jakiej skali wykonano tę mapę? Odp. 1 : 1 000 000.

Ćwiczenie: Na mapie wykonanej w skali 1 : 1 000 000 powierzchnia Warszawy mieści się w kole mniej więcej o średnicy 1 cm 5 mm. Ile mniej więcej wynosi średnica tego koła w terenie? Odp. 15 km.

Ćwiczenie: Działka pana Nowobogackiego ma kształt prostokąta o wymiarach 200 m × 250 m. Jakie wymiary będzie miała ta działka na planie wykonanym w skali 1 : 5000? Odp. 4 cm × 5 cm.

Rozwiązywanie zadań tekstowych dotyczących skali pomniejszającej

Przybliżyliśmy już sobie pojęcie skali pomniejszającej. Wiesz już o niej dość dużo. Przejdźmy więc do zadań tekstowych. Zauważ, że w ćwiczeniach co robiliśmy do tej pory, zawsze była narysowana strzałka i jakaś liczba oprócz niej np. skala lub długość odcinka (albo w rzeczywistości albo po zastosowaniu skali). Tym razem taki szkic trzeba będzie zrobić samemu — i to poprawnie. Zobacz przykładowe zadania tekstowe.

Zadanie: Most Świętokrzyski w Warszawie na planie w skali 1 : 10000 ma długość 48 mm. Jaką długość ma ten most w rzeczywistości?

Analiza zadania:

Znasz skalę, czyli rysujesz sobie strzałkę i piszesz nad nią 1 : 10000. Wracasz się do treści zadania i czytasz, że most ten na planie (po zastosowaniu skali) ma długość 48 mm. Zatem na prawo od strzałki piszesz liczbę 48 mm. Masz więc schemat:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\ldots} \xrightarrow{1:10000} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{48\text{ mm}}$$

zrobiony samodzielnie na potrzeby tego zadania. Ponieważ skala 1 : 10000 pomniejsza liczbę z lewej strony strzałki dokładnie 10000 razy, więc ta brakująca liczba jest dokładnie 10000 razy większa od liczby po prawej stronie strzałki. Zważywszy na to, że przy stosowaniu skali nigdy nie ma ani dodawania ani odejmowania, więc należy się zastanowić tylko nad tym, czy w tej sytuacji trzeba zastosować mnożenie czy dzielenie. Ponieważ w przypadku tego zadania liczba po lewej stronie strzałki ma być większa od liczby po prawej stronie strzałki, więc tę liczbę po prawej stronie strzałki trzeba **pomnożyć** przez 10000, bo mnożenie powiększa[1] liczbę.

Rozwiązanie:

$$48\text{ mm} \cdot 10000 = 480000\text{ mm} = 480\text{ m}$$

Odp. Most Świętokrzyski w rzeczywistości ma długość 480 m.

Zamieniamy milimetry na metry.
Wiemy, że:
$\boxed{1000\text{ mm} = 1\text{ m}}$
Widzimy, że po obu stronach jest cyfra **1**, oraz to, że po lewej stronie zniknęły 3 zera.
Zatem zamieniając milimetry na metry, należy skreślić 3 ostatnie zera.

Zadanie: Pałac Kultury i Nauki w Warszawie ma mniej więcej 230 m wysokości. Ile centymetrów będzie mieć wysokość tego pałacu jeśli wykonamy jego miniaturkę w skali 1 : 1000?

Analiza zadania:

Znasz skalę, czyli rysujesz sobie strzałkę i piszesz nad nią 1 : 1000. Wracasz się do treści zadania i czytasz, że pałac ten ma w rzeczywistości 230 m wysokości. Zatem na lewo od strzałki piszesz liczbę 230 m. Masz więc schemat:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{230\text{ m}} \xrightarrow{1:1000} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots}$$

zrobiony samodzielnie na potrzeby tego zadania. Ponieważ skala 1 : 1000 pomniejsza liczbę z lewej strony strzałki dokładnie 1000 razy, więc ta brakująca liczba z prawej strony strzałki jest dokładnie 1000 razy mniejsza od liczby po lewej stronie strzałki. Ponieważ w przypadku tego zadania liczba po lewej stronie strzałki ma być większa od liczby po prawej stronie strzałki, więc tę liczbę po lewej stronie strzałki trzeba **podzielić** przez

[1] To, że mnożenie powiększa liczby nie jest zawsze prawdą. Gdy poznasz tzw. ułamki dowiesz się, że mnożenie danej liczby przez ułamek zawierający się między 0 a 1 pomniejszy daną liczbę, a nie powiększy.

1000, bo dzielenie pomniejsza[2] liczbę. Oczywiście, by dzielenie to było możliwe, najpierw tę liczbę po lewej stronie strzałki należy zamienić na jednostki mniejsze np. na centymetry.

Rozwiązanie:

$$\underbrace{230\text{ m}}_{23000\text{ cm}} : 1000 = 23000\text{ cm} : 1000 = 23\text{ cm}$$

Zamieniamy metry na centymetry.
Wiemy, że:
$\boxed{1\text{ m} = 100\text{ cm}}$
Widzimy, że po obu stronach jest cyfra 1, oraz to, że po prawej stronie pojawiły się 2 zera.
Zatem zamieniając metry na centymetry, należy do danej liczby dopisać 2 zera.

Odp. Miniaturka tego pałacu będzie mieć wysokość 23 cm.

Zadanie: Budynek Burdż Chalifa w Zjednoczonych Emiratach Arabskich ma prawie 830 m wysokości. Jego miniaturka wykonana przez zbudowaniem tego budynku miała wysokość 83 cm. W jakiej skali wykonano tę miniaturkę?

Analiza zadania:

Nie znasz skali, ale strzałkę sobie rysujesz. Wracasz się do treści zadania i czytasz, że budynek ten ma w rzeczywistości 830 m wysokości. Piszesz więc po lewej stronie strzałki liczbę 830 m i ponownie wracasz do treści zadania. Czytasz dalej, że miniaturka tego budynku po zastosowaniu skali miała 83 cm. Zatem po prawej stronie strzałki wpisujesz liczbę 83 cm. Powstał Ci schemat:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{830\text{ m}} \xrightarrow{\;\dots\;} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{83\text{ cm}}$$

Zauważasz jednak, że liczby po obu stronach strzałek nie są wyrażone w tych samych jednostkach. Zamieniasz więc jednostki większe na mniejsze, czyli w tym przypadku metry na centymetry. Masz więc nowy schemat:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{83000\text{ cm}} \xrightarrow{\;\dots\;} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{83\text{ cm}}$$

zrobiony samodzielnie na potrzeby tego zadania. Ponieważ liczba po prawej stronie strzałki jest mniejsza od liczby po lewej stronie, więc liczba po lewej stronie została zmniejszona. Oznacza to, że zastosowano skalę pomniejszającą, czyli że nad strzałką będziemy mieli „1 dwukropek coś tam”. Trzeba tylko wyliczyć ile to „coś tam” wynosi. Aby to zrobić dzielimy liczbę większą przez mniejszą.

Rozwiązanie:

$$\underbrace{830\text{ m}}_{83000\text{ cm}} : 83\text{ cm} = 1000$$

Zamieniamy metry na centymetry.
Wiemy, że:
$\boxed{1\text{ m} = 100\text{ cm}}$
Widzimy, że po obu stronach jest cyfra 1, oraz to, że po prawej stronie pojawiły się 2 zera.
Zatem zamieniając metry na centymetry, należy do danej liczby dopisać 2 zera.

Odp. Miniaturkę tego budynku wykonano w skali 1 : 1000.

Ćwiczenie: W stolicy Malezji wybudowano w XIX wieku dwa bliźniacze budynki mające trochę powyżej 450 m. Ile centymetrów będą one miały, jeśli ich miniaturki wykonamy w skali 1: 1000? Odp. 45 cm.

Ćwiczenie: Statek pasażerski Arcadia gdyby został wykonany w skali 1 : 1000 miałby 29 cm długości. Jaką długość ma ten statek w rzeczywistości? Odp. 290 m.

Ćwiczenie: Długość pasa startowego na warszawskim Okęciu wynosi 2800 m. Jaką długość będzie mieć ten pas startowy, jeśli zostanie on przedstawiony na planie w skali 1 : 40000? Odp. 7 cm.

Ćwiczenie: Ziemia po wykonaniu w skali 1 : 1 000 000 000 jest kulką o średnicy 13 mm, zaś Księżyc po wykonaniu w tej samej skali jest kulką o średnicy ok. 3 mm krążącą w odległości 38 cm od Ziemi. Ile w rzeczywisto-

[2] To, że dzielenie pomniejsza liczbę nie jest zawsze prawdą. Gdy poznasz tzw. ułamki dowiesz się, że dzielenie danej liczby przez ułamek zawierający się między 0 a 1 powiększy daną liczbę, a nie pomniejszy.

ści wynosi średnica Ziemi i Księżyca? Jaka jest rzeczywista odległość między Ziemią a Księżycem?
Odp. 13000 km; 3000 km; 380000 km.

Ćwiczenie: Słońce po wykonaniu w skali 1 : 1 000 000 000 jest kulką o średnicy 139 cm, zaś Pluton po wykonaniu w tej samej skali jest kulką o średnicy 2 mm krążącą w odległości 5 km 900 m od Słońca. Ile w rzeczywistości wynosi średnica Słońca i Plutona? Jaka jest rzeczywista odległość między Słońcem a Plutonem?
Odp. 1 390 000 km; 2000 km; 5 900 000 000 km.

Skala mianowana — dopisywanie jednostek długości do skali liczbowej

Do tej pory rozwiązując zadania ze skalą robiliśmy schemat polegający na narysowaniu strzałki, napisaniu skali oraz długości odcinka w rzeczywistości lub po zastosowaniu skali. Teraz zrobimy coś podobnego, ale nie będziemy rysować strzałki, a długość odcinka w rzeczywistości będziemy pisać po prawej stronie, a nie jak do tej pory po lewej.

W zamienianiu skali liczbowej na mianowaną chodzi tylko o to, by do obu liczb tworzących skalę dopisać te same jednostki i ewentualnie większą z liczb mianowanych zamienić na większe jednostki. Musisz jednak wiedzieć, że w przeciwieństwie do metody podanej na początku tego opracowania, tym razem liczba za dwukropkiem oznacza odległość w rzeczywistości, a przed dwukropkiem — na planie. Zobacz przykładowe zadania.

Zadanie: Zamień podaną skalę liczbową na mianowaną, a następnie odczytaj jaka odległość w rzeczywistości odpowiada 1 mm na planie (mapie).

a) 1 : 30   b) 1 : 100   c) 1 : 250   d) 1 : 10 000

Analiza zadania:

W treści zadania masz podane milimetry, więc dopisujesz je do obu liczb tworzących skalę liczbową.

Rozwiązanie:

a) 1 mm — 30 mm   b) 1 mm — $\underbrace{100\text{ mm}}_{10\text{ cm}}$ c) 1 mm — $\underbrace{250\text{ mm}}_{25\text{ cm}}$ d) 1 mm — $\underbrace{10000\text{ mm}}_{10\text{ m}}$

Zadanie: Zamień podaną skalę liczbową na mianowaną, a następnie odczytaj jaka odległość w rzeczywistości odpowiada 1 cm na planie (mapie).

a) 1 : 30   b) 1 : 100   c) 1 : 250   d) 1 : 10 000

Rozwiązanie:

a) 1 cm — 30 cm   b) 1 cm — $\underbrace{100\text{ cm}}_{1\text{ m}}$ c) 1 cm — $\underbrace{250\text{ cm}}_{2\text{ m}50\text{ cm}}$ d) 1 cm — $\underbrace{10000\text{ cm}}_{100\text{ m}}$

Ćwiczenie: Zamień podaną skalę liczbową na mianowaną, a następnie odczytaj jaka odległość w rzeczywistości odpowiada 1 mm na planie (mapie).

a) 1 : 50   b) 1 : 100   c) 1 : 150   d) 1 : 200   e) 1 : 500   f) 1 : 1000   g) 1 : 500 000

[Odp. a) 5 cm, b) 10 cm, c) 15 cm, d) 20 cm, e) 50 cm, f) 1 m, g) 500 m.]

Ćwiczenie: Zamień podaną skalę liczbową na mianowaną, a następnie odczytaj jaka odległość w rzeczywistości odpowiada 1 cm na planie (mapie).

a) 1 : 50   b) 1 : 100   c) 1 : 150   d) 1 : 200   e) 1 : 500   f) 1 : 1000   g) 1 : 500 000

[Odp. a) 50 cm, b) 1 m, c) 150 cm, d) 2 m, e) 5 m, f) 10 m, g) 5 km.]

Zadanie: Zamień podaną skalę liczbową na mianowaną, a następnie odczytaj jakiej odległości w rzeczywistości odpowiada 8 cm na planie (mapie).

a) 1 : 200 b) 1 : 1000 c) 1 : 50 000 d) 1 : 2 250 000

Analiza zadania:

W treści zadania masz skalę liczbową oraz odległość wyrażoną w centymetrach. Dopisujesz więc do podanej skali liczbowej centymetry, a następnie obie liczby mnożysz przez 8, bo z treści zadania wiesz, że masz uzyskać po lewej stronie (na planie lub mapie) dokładnie 8 cm.

Rozwiązanie:

a) 1 cm — 200 cm
8 cm — $\underbrace{1600 \text{ cm}}_{16 \text{ m}}$

b) 1 cm — 1000 cm
8 cm — $\underbrace{8000 \text{ cm}}_{80 \text{ m}}$

c) 1 cm — 50 000 cm
8 cm — $\underbrace{400\,000 \text{ cm}}_{4 \text{ km}}$

d) 1 cm — 2 250 000 cm
8 cm — $\underbrace{18\,000\,000 \text{ cm}}_{180 \text{ km}}$

Ćwiczenie: Zamień podaną skalę liczbową na mianowaną, a następnie odczytaj jakiej odległości w rzeczywistości odpowiada 6 mm na planie (mapie).

a) 1 : 50 b) 1 : 100 c) 1 : 150 d) 1 : 200 e) 1 : 500 f) 1 : 1000 g) 1 : 500 000

[Odp. a) 30 cm, b) 60 cm, c) 90 cm, d) 120 cm, e) 3 m, f) 6 m, g) 3 km.]

Ćwiczenie: Zamień podaną skalę liczbową na mianowaną, a następnie odczytaj jakiej odległości w rzeczywistości odpowiada 12 cm na planie (mapie).

a) 1 : 50 b) 1 : 100 c) 1 : 150 d) 1 : 200 e) 1 : 500 f) 1 : 1000 g) 1 : 500 000

[Odp. a) 6 m, b) 12 m, c) 18 m, d) 24 m, e) 60 m, f) 120 m, g) 60 km.]

Zadanie: Określ w jakiej skali jest wykonana mapa (plan), jeśli wiesz, że 1 mm na planie (mapie) odpowiada:

a) 10 mm b) 100 mm c) 200 cm d) 4 m

Rozwiązanie:

a) 1 mm — 10 mm
1 : 10

b) 1 mm — 100 mm
1 : 100

c) 1 mm — 200 cm
1 mm — 2000 mm
1 : 2000

d) 1 mm — 4 m
1 mm — 4000 mm
1 : 4000

Ćwiczenie: Określ w jakiej skali jest wykonana mapa (plan), jeśli wiesz, że 1 mm na planie (mapie) odpowiada w rzeczywistości:

a) 8 mm b) 32 mm c) 40 cm d) 2 m e) 50 m f) 800 m g) 3 km

[Odp. a) 1 : 8, b) 1 : 32, c) 1 : 400, d) 1 : 2000, e) 1 : 50 000, f) 1 : 800 000, g) 1 : 3 000 000.]

Ćwiczenie: Określ w jakiej skali jest wykonana mapa (plan), jeśli wiesz, że 1 cm na planie (mapie) odpowiada w rzeczywistości:

a) 8 cm b) 32 cm c) 120 cm d) 2 m e) 50 m f) 800 m g) 3 km

[Odp. a) 1 : 8, b) 1 : 32, c) 1 : 120, d) 1 : 200, e) 1 : 5 000, f) 1 : 80 000, g) 1 : 300 000.]

Zadanie: Określ w jakiej skali jest wykonana mapa (plan), jeśli wiesz, że 4 cm na planie (mapie) odpowiadają:

a) 4 m   b) 300 m   c) 2 km   d) 60 km

Analiza zadania:

W treści zadania masz centymetry, a w podpunktach jednostki inne niż centymetry. Musisz więc najpierw pozamieniać wszystkie jednostki na centymetry. Chodzi o to, by mieć zgodność z jednostką podaną w treści zadania. Mając już te same jednostki, musisz każdą z liczb tworzących skalę mianowaną podzielić przez 4 cm, bo taką właśnie liczbę masz w treści zadania.

Rozwiązanie:

b) 4 cm — 4 m
4 cm — 4000 mm
1 : 1000

b) 4 cm — 300 m
4 cm — 300 000 mm
1 : 75 000

c) 4 cm — 2 km
4 cm — 2 000 000 mm
1 : 500 000

d) 4 cm — 60 km
4 cm — 60 000 000 mm
1 : 15 000 000

Ćwiczenie: Określ w jakiej skali jest wykonana mapa (plan), jeśli wiesz, że 8 mm na planie (mapie) odpowiada:

a) 8 mm   b) 32 mm   c) 40 cm   d) 2 m   e) 50 m   f) 800 m   g) 3 km

[Odp. a) 1 : 1, b) 1 : 4, c) 1 : 5, d) 1 : 250, e) 1 : 6250, f) 1 : 100 000, g) 1 : 375 000.]

Ćwiczenie: Określ w jakiej skali jest wykonana mapa (plan), jeśli wiesz, że 12 cm na planie (mapie) odpowiada:

a) 12 cm   b) 48 cm   c) 120 cm   d) 204 cm   e) 6 m   f) 80 m 4 cm   g) 3 km

[Odp. a) 1 : 1, b) 1 : 4, c) 1 : 10, d) 1 : 17, e) 1 : 50, f) 1 : 667, g) 1 : 25 000.]

Zadanie: Zamień podaną skalę liczbową na mianowaną, a następnie odczytaj jaka jest odległość na mapie (planie), jeśli w rzeczywistości wynosi ona 1240 m.

a) 1 : 200   b) 1 : 1000   c) 1 : 40 000   d) 1 : 2 250 000

Analiza zadania:

W treści zadania masz skalę liczbową oraz odległość wyrażoną w metrach. Możesz do obu liczb skali liczbowej dopisać metry, ale nie będzie to wygodne. W tym zadaniu wygodniejsze będą centymetry lub milimetry. Przerabiasz więc skalę liczbową na mianowaną i dodatkowo liczbę z treści zdania tj. 240 m zamieniasz na centymetry lub milimetry — musisz mieć bowiem te same jednostki. Potem ustalasz, czy większa z liczb tworzących skalę mianowaną została pomnożona czy podzielona i przez ile. Gdy to zrobisz, to takie samo działanie wykonujesz na pierwszej liczbie.

Rozwiązanie:

a) 1 cm — 200 cm
x cm — $\underbrace{1240\text{ m}}_{124\,000\text{ cm}}$

$x = 124000\text{ cm} : 200\text{ cm}$
$x = 620$

b) 1 cm — 1000 cm
x cm — $\underbrace{1240\text{ m}}_{124\,000\text{ cm}}$

$x = 124000\text{ cm} : 1000\text{ cm}$
$x = 124$

c) 1 mm — 40 000 mm
x mm — $\underbrace{1240\text{ m}}_{1\,240\,000\text{ mm}}$

$x = 1\,240\,000\text{ mm} : 40\,000\; mm$
$x = 31$

d) 1 mm — 2 250 000 mm
x mm — $\underbrace{1240\text{ m}}_{1\,240\,000\text{ mm}}$

$x = 1\,240\,000\text{ mm} : 2\,250\,000\text{ mm}$
$x = ?$

Aby obliczyć ile wynosi x, musisz znać ułamki dziesiętne okresowe, lub jednostki mniejsze od milimetra. Wynik bowiem to $x = 0{,}55(1)$.

Spostrzeżenie: Wyniki końcowe wyszły bez jednostek, bo jednostki już były napisane przy x w drugiej linijce.

Inne podejście do zadań (bardziej rachunkowe):

Przypuśćmy, że masz skalę 1 : 4. Do obu tych liczb dopisujemy te same jednostki — najlepiej dopisywać milimetry. Masz zatem 1 mm : 4 mm. Liczba po lewej stronie dwukropka oznacza odległość na planie, a liczba za dwukropkiem odległość w rzeczywistości (w terenie). Jeśli z treści zadania wiesz, że odległość na planie wynosi np. 3 mm, po lewej stronie dwukropka piszesz 3 mm, a za dwukropkiem piszesz liczbę x. Masz zatem:

$$1\text{ mm} : 4\text{ mm}$$

$$3\text{ mm} : x$$

Nie możesz zamiast dwukropka pisać znaku równości, bo 4 mm nie są równe 1 mm. Dwukropek możesz zastąpić myślnikiem, bo liczba po lewej stronie pokazuje odległość na planie, a po prawej w rzeczywistości.

Aby wyliczyć *x* czyli odległość w rzeczywistości, musisz najpierw się dowiedzieć przez ile została pomnożona pierwsza czerwona liczba — wykonujesz zatem działanie:

$$3\text{ mm} : 1\text{ mm} = 3$$

Oznacza to, że pierwszą zieloną liczbę musisz pomnożyć przez 3. Robiąc tak dostajesz

$$x = 4\text{ mm} \cdot 3 = 12\text{ mm}.$$

No i masz już wyliczony x. Zobacz inny przykład.

Przypuśćmy, że masz skalę 1 : 5. Do obu tych liczb dopisujemy te same jednostki — najlepiej dopisywać milimetry. Masz zatem 1 mm : 5 mm. Liczba po lewej stronie dwukropka oznacza odległość na planie, a liczba za dwukropkiem odległość w rzeczywistości (w terenie). Jeśli z treści zadania wiesz, że odległość w rzeczywistości wynosi np. 35 mm, po prawej stronie dwukropka piszesz 35 mm, a przed dwukropkiem piszesz liczbę x. Masz zatem:

$$1\text{ mm} : 5\text{ mm}$$

$$x : 35\text{ mm}$$

Aby wyliczyć *x* czyli odległość w rzeczywistości, wykonujesz działanie:

$$35\text{ mm} : 5\text{ mm} = 7$$

i otrzymaną przed chwilą liczbę mnożysz przez pierwszą czerwoną liczbę czyli przez 1 mm. Masz zatem, że:

$$x = 1\text{ mm} \cdot 7 = 7\text{ mm}.$$

Zadanie: Odległość między dwoma miastami mierzona w linii prostej wynosi 20 km. Jaka jest odległość między tymi miastami na mapie wykonanej w skali 1 : 100 000?

Rozwiązanie:

$$1\text{ mm} : 100\,000\text{ mm}$$ — dopisanie mm do liczb tworzących skalę

$$x : \underbrace{20\text{ km}}_{20\,000\,000\text{ mm}}$$ — x jest przed dwukropkiem, bo nie znamy odległości na mapie

$$20\,000\,000\text{ mm} : 100\,000\text{ mm} = 200$$

$$200 \cdot 1\text{ mm} = 200\text{ mm} = 20\text{ cm}$$

Odpowiedź: Na mapie w skali 1 : 100 000 odległość między tymi miastami wynosi 20 cm.

Zadanie: Odległość między dwoma miastami na mapie wykonanej w skali 1 : 250 000 mierzona w linii prostej wynosi 6 cm. Jaka jest odległość między tymi miastami w terenie?

Rozwiązanie:

$$1\text{ cm} : 250\,000\text{ cm}$$ — dopisanie cm do liczb tworzących skalę

$$6\text{ cm} : x$$ — x jest za dwukropkiem, bo nie znamy odległości w terenie

Patrząc na liczby przed dwukropkami widzisz, że 1 cm został pomnożony przez 6 w wyniku czego otrzymano 6 cm. Oznacza to, że liczbę za dwukropkiem tj. 250 000 cm także musisz pomnożyć przez 6. Mówiąc na marginesie, liczbę 6 można było znaleźć wykonując dzielenie 6 cm przez 1 cm.

$$x = 6 \cdot 250\,000\text{ cm} = 1\,500\,000\text{ cm} = 15000\text{ m} = 15\text{ km}$$

Odpowiedź: W terenie odległość między tymi miastami wynosi 15 km.

Zamieniamy centymetry na metry.
Wiemy, że:
$\boxed{100\text{ cm} = 1\text{ m}}$
Widzimy, że po obu stronach jest cyfra 1, oraz to, że zniknęły dwa zera.
Zatem zamieniając centymetry na metry, należy skreślić 2 ostatnie zera.

Powyżej zaprezentowana metoda, choć jest popularna, to ma jeden mankament. Nie można za jej pomocą rozwiązywać wszystkich typów zadań ze skalą pomniejszającą. Przykładowo nie można rozwiązać takiego zadania: „Długość mostu wynosi 200 m. Na planie most ten ma długość 5 mm. W jakiej skali wykonano plan przedstawiający ten most?”

Poniżej zobaczysz rozwiązane zadania ze skali pomniejszającej dwiema różnymi metodami. Pierwsza z nich została omówiona na samym początku tego opracowania, zaś druga przed chwilą.

Zadanie: W terenie, odległość mierzona w linii prostej z Tarnowa do Rzeszowa wynosi 72 km. Jaka jest odległość w linii prostej między tymi miastami na mapie w skali 1 : 2 000 000?

Analiza zadania:

metoda 1

Znasz skalę, czyli rysujesz sobie strzałkę i piszesz nad nią 1 : 2 000 000. Wracasz się do treści zadania i czytasz, że odległość w terenie wynosi 72 km. Ponieważ jest to odległość w terenie, a nie na mapie, więc piszesz ją po lewej stronie strzałki. Robisz więc schemat:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{72\text{ km}} \xrightarrow{1:2\,000\,000} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\dots}$$

Ponieważ skala 1 : 2 000 000 pomniejsza liczbę z lewej strony strzałki dokładnie 2 000 000 razy, więc by znaleźć liczbę z prawej strony strzałki, musisz liczbę z lewej strony strzałki, podzielić przez liczbę stojącą za dwukropkiem, czyli przez 2 000 000.

By móc to zrobić, najpierw zamieniasz kilometry na jednostki mniejsze np. na milimetry. Masz zatem:

$$72\text{ km} = 72\,000\text{ m} = 72\,000\,000\text{ mm}$$

metoda 2

Znasz skalę, więc możesz ją przerobić na skalę mianowaną tj. dopisać do obu jej liczb te same jednostki. Dopisz więc milimetry, bo są one dość małą jednostką. Masz więc:

$$1\text{ mm} : 2\,000\,000\text{ mm}$$

Ponieważ odległość w terenie jest po prawej stronie dwukropka, a z treści zadania wynosi ona 72 km, więc za dwukropkiem piszesz 72 km, a przed dwukropkiem x. Masz więc:

$$x : 72\text{ km}$$

By mieć te same jednostki w obu linijkach ze skalą, zamieniasz 72 km na milimetry. Masz zatem:

$$72\text{ km} = 72000\text{ m} = 72000000\text{ mm}$$

czyli:

$$x : 72\,000\,000\text{ mm}$$

Ponieważ pierwsza zielona liczba została zwiększona, więc pierwszą czerwoną liczbę tj. 1 mm też trzeba zwiększyć i to tyle samo razy. By dowiedzieć się ile razy, została zwiększona pierwsza zielona liczba, należy podzielić przez drugą zieloną liczbę tj. przez 72 000 000 mm przez pierwszą zieloną liczbę tj przez 2 000 000 mm.

Rozwiązanie:

$$72\,000\,000\text{ mm} : 2\,000\,000 = 36\text{ mm}$$

$$72\,000\,000\text{ mm} : 2\,000\,000\text{ mm} = 36$$

$$1\text{ mm} \cdot 36 = 36\text{ mm}$$

Odp. W mapie w skali 1 : 2 000 000 odległość między tymi miastami wynosi 36 mm czyli 3 cm 6 mm.

Podsumowując krótko rozwiązywanie zadań ze skali pomniejszającej, można zauważyć, że metoda podana na początku tego opracowania jest szybsza niż ta, która wymaga zamieniana skali liczbowej na skalę mianowaną. Poza tym, tą pierwszą metodą można rozwiązywać każdy typ zadania, zaś tą drugą tylko te zadania w których jest podana skala liczbowa.

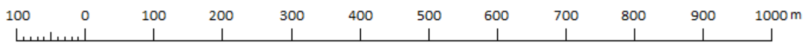
Jak posługiwać się powiększającą skalą mianowaną, możesz przetarć na stronie 29.

Skala liniowa — graficzne przedstawienie skali mianowanej

Skale które już zostały przedstawione w tym opracowaniu, nie są jedynymi z jakimi można spotkać się na matematyce. Oprócz nich istnieje jeszcze skala logarytmiczna oraz liniowa. Skalą logarytmiczną nie będę się w tym opracowaniu zajmować, gdyż wkroczyłbym w nadobowiązkowy materiał szkoły średniej.

Skala liniowa daje równomierne rozmieszczenie liczb (skojarz z osią liczbową). Dzięki tej skali odstępy między kolejnymi liczbami naturalnymi są zawsze takie same. Umożliwia więc ona m.in. precyzyjne zaznaczanie ułamków na osi liczbowej i dodatkowo zapewnia Ci, że jeśli na osi liczbowej masz dwie liczby np. 5 i 8 (różnica między nimi to 3) oraz inne dwie liczby o tej samej różnicy np. 12 i 15, to odcinek łączący liczby 5 i 8 będzie mieć taką samą długość jak odcinek łączący liczby 12 i 15.

W przypadku map i planów zamiast osi liczbowej mamy tzw. podziałkę liniową, czyli odcinek np. o długości 10 cm podzielony na mniejsze równe części. Dodatkowo jedna z tych części jest dorysowana z lewej strony do głównego odcinka i także jest podzielona na jeszcze mniejsze równe części. Zobacz poniższy rysunek:



Analiza wyglądu podziałki liniowej na przykładzie powyższego rysunku:

— kreseczki pionowe na podziałce liniowej nie przechodzą na drugą stronę linii poziomej (na osi liczbowej pionowe kreseczki przecinają linię poziomą)

— odcinek na lewo od 0 jest podzielony na mniejsze równe części (z reguły części tych jest 10)

— środkowa kreseczka w odcinku położonym na lewo od 0 jest nieco dłuższa od kreseczek z nią sąsiadujących

— podziałka liniowa ma zawsze napisaną jednostkę długości przy ostatniej liczbie (na ogół są to metry)

— podziałka liniowa nie zawiera linii pogrubionych

Zauważ, że gdyby powyższa podziałka liniowa została tak dobrana by odcinek od 0 do 100 miał długość dokładnie 1 cm, to wówczas 1 mm na planie o takiej podziałce odpowiadałby 10 metrom w rzeczywistości a 1 cm 100 metrom.

Podziałka liniowa jest dość często mylona ze skalą liniową. Pamiętaj, że skala liniowa zapewnia tylko równomierne rozłożenie liczb dzięki czemu możemy łatwo oszacować liczbę, która nie jest dokładnie zaznaczona na podziałce liniowej. Chodzi generalnie o to, że jeśli na podziałce liniowej nie ma zaznaczonej jakiejś liczby np. liczby 250, to dzięki skali liniowej wiemy, że znajduje się ona dokładnie w połowie między zaznaczoną liczbą 200 a 300.

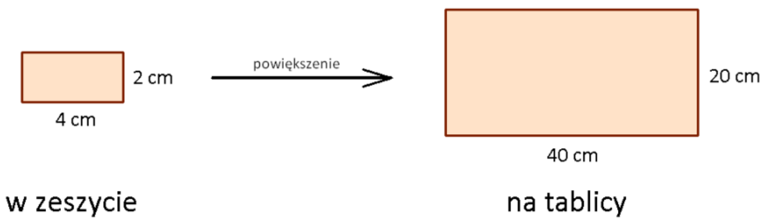
Jeśli na planie znajduje się podziałka liniowa, to daje ona możliwość bardzo szybkiego odczytania odległości między dwoma dość bliskimi punktami i to bez wykonywania jakichkolwiek działań matematycznych. Pomiar odległości na planie wyposażonej w podziałkę liniową wykonuje się następująco:

1. Jedną nóżkę cyrkla wbijamy w pierwszy punkt od którego chcemy zmierzyć odległość.
2. Drugą nóżkę cyrkla wbijamy w drugi punkt do którego chcemy zmierzyć odległość.
3. Tak rozwarty cyrkiel przenosimy na podziałkę liniową. Jedną jego nóżkę wbijamy tam gdzie jest 0, a drugą w podziałkę liniową tam gdzie wypadnie, ale zawsze na prawo względem pierwszej nóżki.
4. Odczytujemy liczbę z podziałki liniowej która jest dokładnie w miejscu wbicia prawej nóżki cyrkla.
5. W razie potrzeby dokładniejszego odczytu, posługujemy się dorysowaną małą podziałką z lewej strony.

Temat: Skala powiększająca.

Rysowanie figur w zadanej skali powiększającej

Przypuśćmy, że odrabiając pracę domową narysowałaś w zeszycie prostokąt o wymiarach 4 cm × 2 cm. Przypuśćmy również, że nauczyciel zażyczył sobie, byś swoją pracę domową przedstawiła na tablicy. Oczywiste więc będzie to, że przerysowując na tablicę prostokąt ze swego zeszytu narysujesz go o większych długościach boków. Powiedzmy, że będzie on mieć wymiary 40 cm × 20 cm. Masz więc coś takiego:

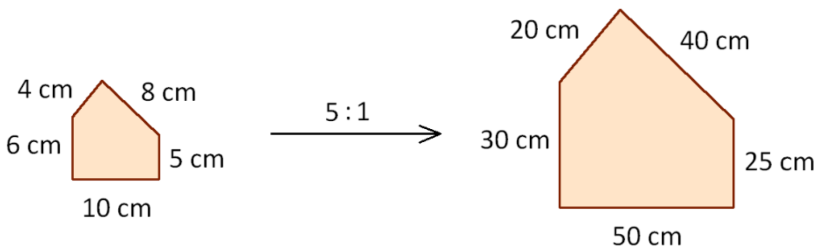


Widzisz zatem, że każdy bok prostokąta który jest w zeszycie (a nie tylko te dwa przy których jest napisana długość) został powiększony i to dokładnie 10 razy.

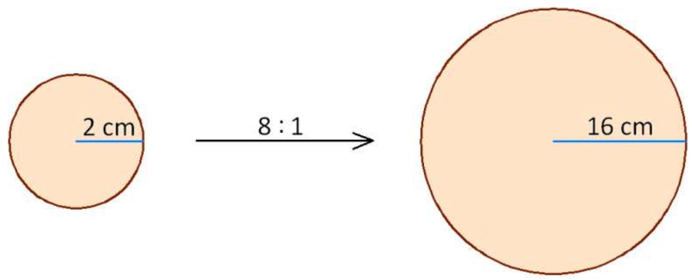
Spostrzeżenie: Przerysowując prostokąt z zeszytu na tablicę, długości jego boków pomnożyłaś przez liczbę 10.

Wniosek: Prostokąt na tablicy został narysowany w skali 10 : 1 (dziesięć do jednego).

Zobacz teraz jak wygląda rysowanie innych figur geometrycznych w podanej skali powiększającej.



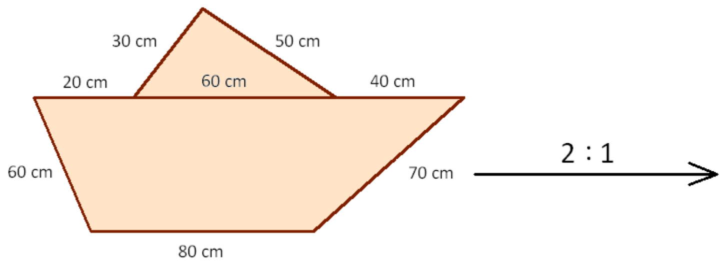
Jak widzisz z powyższego rysunku, obie figury mają taki sam kształt, a powiększenie figury polega na pomnożeniu długości <u>wszystkich</u> jej boków przez liczbę która jest w skali przed dwukropkiem oraz na pozostawieniu bez zmian jednostek długości. Zobacz inne przykłady:



Spostrzeżenie: Koła nie mają boków, a mimo to można wykonywać je w skali powiększającej. Aby móc wykonać koło w zadanej skali powiększającej, wystarczy poprawnie zwiększyć długość jego promienia.

Wniosek: Skalować możemy także linie krzywe, a nie tylko odcinki.

Ćwiczenie: Narysuj szkic poniższej figury oraz podaj długości wszystkich jej boków w zadanej skali.



Odp. (Od dołu przeciwnie do ruchu wskazówek zegara): 160 cm, 140 cm, 80 cm, 100 cm, 60 cm, 40 cm, 120 cm; 180 cm.

Obliczanie długości odcinka po zastosowaniu skali powiększającej

Ponieważ wykonywanie figur w skali powiększającej na ogół sprowadza się tylko do powiększania długości odcinków, więc od teraz skupiać się będę głównie na odcinkach.

Zobacz. Jeśli w rzeczywistości masz odcinek o długości np. 4 mm (wysokość literki), to aby obliczyć jego długość w skali 100 : 1 musisz te 4 mm pomnożyć przez liczbę która stoi przed dwukropkiem tj. przez liczbę 100.

4 mm (w rzeczywistości) $\xrightarrow{100 : 1}$ 400 mm (po zastosowaniu skali)

Dzieląc czerwoną liczbę przez niebieską dostajesz 400 mm, czyli długość tego odcinka po zastosowaniu skali 100 : 1. Jednostkę zostawiasz bez zmian. Jeśli chcesz, to dodatkowo otrzymany wynik możesz zamienić na inną jednostkę np. na centymetry.

Proste, prawda? Oto inne przykłady:

w rzeczywistości	skala	po zastosowaniu skali
10 mm	$\xrightarrow{5 : 1}$	50 mm
30 dm	$\xrightarrow{6 : 1}$	180 dm
18 m	$\xrightarrow{3 : 1}$	540 m

Krótkie podsumowanie:

Jeśli znasz długość odcinka w rzeczywistości, to w celu obliczenia jego długości po zastosowaniu skali powiększającej, musisz jego rzeczywistą długość (tę po lewej stronie strzałki) pomnożyć przez liczbę która stoi przed dwukropkiem, a jednostkę pozostawić bez zmian.

Ćwiczenie: Uzupełnij brakujące miejsca.

w rzeczywistości	skala	po zastosowaniu skali	w rzeczywistości	skala	po zastosowaniu skali	w rzeczywistości	skala	po zastosowaniu skali
6 mm	$\xrightarrow{2 : 1}$	…	8 dm	$\xrightarrow{4 : 1}$	…	18 m	$\xrightarrow{6 : 1}$	…
8 mm	$\xrightarrow{8 : 1}$	…	15 dm	$\xrightarrow{3 : 1}$	…	14 m	$\xrightarrow{14 : 1}$	…
12 mm	$\xrightarrow{4 : 1}$	…	14 dm	$\xrightarrow{7 : 1}$	…	15 m	$\xrightarrow{5 : 1}$	…

Odp. (pionowo): 12 mm, 64 mm, 48 mm, 32 dm, 45 dm, 98 dm, 108 m, 196 m, 75 m.

Weźmy teraz inną długość odcinka niż poprzednio i inną skalę. Niech teraz jakiś odcinek w rzeczywistości ma długość powiedzmy 8 mm (niech będzie to np. średnica tabletki). Zastanów się jaką długość będzie on mieć po narysowaniu w skali np. 10000 : 1.

Na początek robisz schemat pokazujący to, co już wiemy:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{8\text{ mm}} \xrightarrow{10000\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{?}$$

no i mnożysz liczbę z lewej strony strzałki przez liczbę stojącą przed dwukropkiem. Robiąc tak masz:

$$8\text{ mm} \cdot 10000 = 80000\text{ mm}$$

Możesz jednak jeszcze otrzymany wynik zamienić np. na metry. Ponieważ 1000 mm to 1 m, więc 80000 mm to 80 m. Zatem:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{8\text{ mm}} \xrightarrow{10000\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{80\text{ m}}$$

> Zamieniamy milimetry na metry.
> Wiemy, że:
> $\boxed{1000\text{ mm} = 1\text{ m}}$
> Widzimy, że po obu stronach jest cyfra **1**, oraz to, że po lewej stronie zniknęły 3 zera.
> Zatem zamieniając milimetry na metry, należy skreślić 3 ostatnie zera.

Także proste, prawda? Prześledź więc inne przykłady, pamiętając o tym, że $1\text{ cm} = 10\text{ mm}$ oraz $1\text{ dm} = 10\text{ cm}$.

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{4\text{ mm}} \xrightarrow{25\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\underbrace{100\text{ mm}}_{10\text{ cm}}} \qquad \underset{\text{w rzeczywistości}}{2\text{ cm}} \xrightarrow{120\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\underbrace{240\text{ cm}}_{24\text{ dm}}} \qquad \underset{\text{w rzeczywistości}}{18\text{ mm}} \xrightarrow{1000\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\underbrace{18000\text{ mm}}_{18\text{ m}}}$$

Ćwiczenie: Uzupełnij brakujące miejsca zamieniając otrzymany wynik na większe jednostki.

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{4\text{ mm}} \xrightarrow{15\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots} \qquad \underset{\text{w rzeczywistości}}{2\text{ mm}} \xrightarrow{250\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots} \qquad \underset{\text{w rzeczywistości}}{4\text{ cm}} \xrightarrow{10\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots}$$

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{4\text{ mm}} \xrightarrow{400\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots} \qquad \underset{\text{w rzeczywistości}}{6\text{ mm}} \xrightarrow{50\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots} \qquad \underset{\text{w rzeczywistości}}{6\text{ dm}} \xrightarrow{100\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots}$$

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{5\text{ mm}} \xrightarrow{12\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots} \qquad \underset{\text{w rzeczywistości}}{8\text{ mm}} \xrightarrow{1000\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots} \qquad \underset{\text{w rzeczywistości}}{8\text{ dm}} \xrightarrow{1000\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots}$$

Odp. (pionowo): 3 cm, 160 cm, 6 cm, 5 dm, 3 dm, 8 m, 4 dm, 60 m. 800 m.

Jak widać, bawiąc się skalą powiększającą, tak naprawdę bawisz się mnożeniem liczb i przy okazji możesz poćwiczyć zamianę jednostek długości oraz wykonywanie mnożenia pisemnego (o ile w pamięci nie potrafisz pomnożyć dwóch liczb). Kontynuujmy.

Czasami może się zdarzyć i tak, że długość odcinka w rzeczywistości będzie wyrażona za pomocą np. dwóch jednostek, czyli w tzw. jednostce dwumianowanej. Zobacz przykład:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{1\text{ cm }2\text{ mm}} \xrightarrow{3\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{?}$$

No i znowu pojawia się pytanie jak obliczyć liczbę po prawej stronie strzałki. Możesz to zrobić na dwa sposoby:

– każdą z liczb po lewej stronie strzałki mnożysz przez liczbę stojącą przed dwukropkiem (otrzymasz: 3 cm 6 mm)

– zamienić 1 cm 2 mm na milimetry tj. na liczbę 12 mm i dopiero teraz zastosować mnożenie, które daje 36 mm.

Uwaga. Pamiętaj o tym, że nie wolno przy zamienianiu długości np. $1\text{ m }2\text{ cm}$ stosować skreślania początkowej jednostki. Innymi słowy nie wolno pisać, że $1\text{ m }2\text{ cm} = 12\text{ cm}$. Takie skreślanie jest prawdziwe tylko czasami, czyli nie wolno czegoś takiego robić zawsze.

Prześledź teraz inne przykłady, pamiętając o tym, że $1\text{ m} = 1000\text{ mm}$ oraz, że $1\text{ km} = 1000\text{ m}$ i $1\text{ dm} = 100\text{ mm}$.

$\underset{\text{w rzeczywistości}}{2\text{ cm }4\text{ mm}} \xrightarrow{6\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\underbrace{12\text{ cm }24\text{ mm}}_{14\text{ cm }4\text{ mm}}}$ | $\underset{\text{w rzeczywistości}}{2\text{ dm }5\text{ mm}} \xrightarrow{5\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\underbrace{10\text{ dm }25\text{ mm}}_{1025\text{ mm}}}$ | $\underset{\text{w rzeczywistości}}{2\text{ m }4\text{ mm}} \xrightarrow{8\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\underbrace{16\text{ m }32\text{ mm}}_{16032\text{ mm}}}$

$\underset{\text{w rzeczywistości}}{2\text{ cm }8\text{ mm}} \xrightarrow{6\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\underbrace{12\text{ cm }48\text{ mm}}_{16\text{ cm }8\text{ mm}}}$ | $\underset{\text{w rzeczywistości}}{5\text{ dm }9\text{ cm}} \xrightarrow{5\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\underbrace{25\text{ dm }45\text{ cm}}_{29\text{ dm }5\text{ cm}}}$ | $\underset{\text{w rzeczywistości}}{4\text{ m }7\text{ dm}} \xrightarrow{8\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\underbrace{32\text{ m }56\text{ dm}}_{37\text{ m }6\text{ dm}}}$

Ćwiczenie: Uzupełnij brakujące miejsca.

$\underset{\text{w rzeczywistości}}{1\text{ m }8\text{ mm}} \xrightarrow{4\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots}$ | $\underset{\text{w rzeczywistości}}{4\text{ dm }5\text{ cm}} \xrightarrow{15\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots}$ | $\underset{\text{w rzeczywistości}}{5\text{ km }80\text{ m}} \xrightarrow{40\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots}$

$\underset{\text{w rzeczywistości}}{3\text{ m }8\text{ cm}} \xrightarrow{4\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots}$ | $\underset{\text{w rzeczywistości}}{4\text{ cm }8\text{ mm}} \xrightarrow{6\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots}$ | $\underset{\text{w rzeczywistości}}{3\text{ km }2\text{ m}} \xrightarrow{100\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\ldots}$

Odp. (w pionie, po zastosowaniu skali): 4 m 32 mm, 12 m 32 cm, 67 dm 5 cm, 28 cm 8 mm, 203 km 200 m, 300 km 200 m.

Obliczanie długości odcinka w rzeczywistości w oparciu o skalę oraz jego długość po zastosowaniu skali

Do tej pory w tym temacie obliczaliśmy jaką długość będzie mieć odcinek po zastosowaniu powiększenia. Zróbmy teraz coś odwrotnego. Zastanówmy się jak obliczyć długość odcinka w rzeczywistości (po lewej stronie strzałki), jeśli wiemy jakie było jego powiększenie oraz jaka jest długość tego odcinka po tym powiększeniu, czyli po prawej stronie strzałki. Rozpatrzmy zatem taki przypadek:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\ldots} \xrightarrow{4\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{8\text{ cm}}$$

i prześledźmy to co widzimy powyżej. Widzimy to, że odcinek o jakiejś długości powiększono 4 razy i otrzymano odcinek o długości 8 cm. Mało tego, skoro ten pierwszy odcinek powiększono, to musi mieć on długość mniejszą niż 8 cm i to 4-rokrotnie, bo taka właśnie liczba stoi przed dwukropkiem. Zatem musimy te 8 cm które są za strzałką podzielić przez 4. Robiąc tak dostajemy: $8\text{ cm} : 4 = 2\text{ cm}$. Uzupełniamy więc brakujące miejsce:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{2\text{ cm}} \xrightarrow{1\,:\,4} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{3\text{ cm}}$$

Spostrzeżenie: W każdym zadaniu ze skalą stosujemy albo dzielenie albo mnożenie. Dzielenie robimy jak chcemy pomniejszyć długość jakiegoś odcinka, zaś mnożenie wykonujemy gdy chcemy powiększyć długość danego odcinka.

Zobaczmy teraz inny przykład:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\ldots} \xrightarrow{8\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{24\text{ mm}}$$

Znowu brakuje długości odcinka w rzeczywistości. Skoro tę długość w rzeczywistości powiększyliśmy 8 razy i dostaliśmy odcinek o długości 24 mm, to teraz ten odcinek o długości 24 mm musimy zmniejszyć — oczywiście 8 razy, bo taka liczba stoi w skali przed dwukropkiem. Robiąc tak dostajemy: $24\text{ mm} : 8 = 3\text{ mm}$. Uzupełniając brakujące miejsce mamy:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{3\text{ mm}} \xrightarrow{8\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{24\text{ mm}}$$

Krótkie podsumowanie:

Jeśli masz skalę powiększającą i nie znasz długości odcinka w rzeczywistości, to długość odcinka po zastosowaniu skali (tę liczbę po prawej stronie strzałki) musisz podzielić przez liczbę jaka jest w skali przed dwukropkiem.

Ćwiczenie: Uzupełnij brakujące miejsca.

$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\ldots} \xrightarrow{2\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{6\text{ mm}}$	$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\ldots} \xrightarrow{4\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{8\text{ dm}}$	$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\ldots} \xrightarrow{6\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{18\text{ m}}$
$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\ldots} \xrightarrow{8\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{8\text{ mm}}$	$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\ldots} \xrightarrow{3\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{15\text{ dm}}$	$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\ldots} \xrightarrow{14\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{14\text{ m}}$
$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\ldots} \xrightarrow{4\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{12\text{ mm}}$	$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\ldots} \xrightarrow{7\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{14\text{ dm}}$	$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\ldots} \xrightarrow{5\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{15\text{ m}}$

Odp. (pionowo): 3 mm; 1 mm; 3 mm; 2 dm; 5 dm; 2 dm; 3 m; 1 m; 3 m.

Jeśli po zastosowaniu skali powiększającej, powiedzmy 3 : 1 masz odcinek wyrażony za pomocą dwóch jednostek np. 2 cm 7 mm (czyli za pomocą tzw. jednostki dwumianowanej), to najpierw jego długość musisz wyrazić w jednostce jednomianowanej — najlepiej wybrać mniejszą jednostkę spośród dwóch podanych. W tym przypadku masz centymetry i milimetry. Wygodnie zatem będzie zamienić tę długość tj. 2 cm 7 mm na milimetry, bo są one mniejsze niż centymetry. Ponieważ 1 cm ma 10 mm, więc 2 cm będą mieć 20 mm, a cały odcinek tj. 2 cm 7 mm będzie mieć 27 mm. Masz więc taką sytuację:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\ldots} \xrightarrow{3\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\underbrace{2\text{ cm }7\text{ mm}}_{27\text{ mm}}}$$

Aby obliczyć długość tego odcinka w rzeczywistości, musisz postępować jak wcześniej tj. podzielić tę liczbę co jest po prawej stronie strzałki przez liczbę która jest w skali przed dwukropkiem. Masz zatem:

$$27\text{ mm} : 3 = 9\text{ mm}$$

czyli, po lewej stronie strzałki musisz wpisać liczbę 9 mm.

Znajdowanie skali powiększającej w oparciu o długości odcinków przed i po zastosowaniu skali

Przejdźmy teraz do ostatniego typu zadań ze skalą powiększającą. Rozpatrzmy taki przypadek w którym znamy długość odcinka w rzeczywistości oraz jego długość po zastosowaniu skali powiększającej np.:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{10\text{ cm}} \xrightarrow{\ldots} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{50\text{ cm}}$$

Z powyższego schematu widzisz dokładnie, że po obu stronach strzałki masz te same jednostki oraz, że nastąpiło 5-ciokrotne powiększenie odcinka o długości 10 cm, czyli, że nad strzałkę musisz wpisać skalę 5 : 1. Zwróć jednak uwagę, że by dowiedzieć się o tym, że przed dwukropkiem musi stać liczba 5, trzeba było wykonać dzielenie liczby większej tj. 50 cm przez liczbę mniejszą tj. przez 10 cm. Prześledź teraz inne przykłady:

$\underset{\text{w rzeczywistości}}{2\text{ mm}} \xrightarrow{5\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{10\text{ mm}}$	$\underset{\text{w rzeczywistości}}{5\text{ dm}} \xrightarrow{6\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{30\text{ dm}}$	$\underset{\text{w rzeczywistości}}{6\text{ m}} \xrightarrow{3\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{18\text{ m}}$

W tego typu zadaniach może czasami zdarzyć się i tak, że po obu stronach strzałki będą różne jednostki. Wówczas musisz liczby po obu stronach strzałki wyrazić w tych samych jednostkach, a dopiero potem w celu ustalenia skali, wykonać dzielenie większej z nich przez mniejszą. Mając różne jednostki po obu stronach strzałki, wygodnie jest wybrać zamianę większej z nich na tę mniejszą co jest po drugiej stronie strzałki. Zobacz przykład:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{40\text{ cm}} \xrightarrow{\quad\dots\quad} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{8\text{ dm}}$$

Nie możesz nad strzałkę wpisać skali 1 : 6, bo po obu stronach strzałki są różne jednostki. Musisz najpierw jedną z tych jednostek zamienić na drugą. Ponieważ decymetry są jednostką większą niż centymetry, więc wygodnie będzie liczbę po prawej stronie strzałki wyrazić w centymetrach, czyli w jednostce która jest po lewej stronie strzałki. Zatem powyższy przykład zmienia się w taki:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{40\text{ cm}} \xrightarrow{\quad\dots\quad} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{80\text{ cm}}$$

no i teraz już widzisz, że dzieląc większą liczbę 80 cm przez 40 cm, dostajesz liczbę 2, czyli, że skala w powyższym przypadku wynosi 2 : 1. Ostatecznie masz więc:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{40\text{ cm}} \xrightarrow{\quad 2:1\quad} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{8\text{ dm}}$$

Prześledź teraz inne przykłady:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{20\text{ cm}} \xrightarrow{\quad 10:1\quad} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\underbrace{2\text{ m}}_{200\text{ cm}}} \qquad \underset{\text{w rzeczywistości}}{2\text{ m}} \xrightarrow{\quad 4000:1\quad} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\underbrace{8\text{ km}}_{8000\text{ m}}} \qquad \underset{\text{w rzeczywistości}}{\underbrace{2\text{ m}}_{20\text{ dm}}} \xrightarrow{\quad 3:1\quad} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{60\text{ dm}}$$

Krótkie podsumowanie:

Jeśli brakuje skali, to najpierw obie liczby wyrażasz w takich samych jednostkach, a następnie większą z nich dzielisz przez mniejszą.

Ćwiczenie: Uzupełnij brakujące miejsca.

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{20\text{ mm}} \xrightarrow{\quad\dots\quad} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\underbrace{6\text{ cm}}_{\dots\dots\dots\text{mm}}} \qquad \underset{\text{w rzeczywistości}}{250\text{ mm}} \xrightarrow{\quad\dots\quad} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\underbrace{1\text{ m}}_{\dots\dots\dots\text{mm}}} \qquad \underset{\text{w rzeczywistości}}{1\text{ mm}} \xrightarrow{\quad\dots\quad} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\underbrace{5\text{ cm}}_{\dots\dots\dots}}$$

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{4\text{ mm}} \xrightarrow{\quad\dots\quad} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\underbrace{8\text{ dm}}_{\dots\dots\dots\text{mm}}} \qquad \underset{\text{w rzeczywistości}}{20\text{ cm}} \xrightarrow{\quad\dots\quad} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\underbrace{1\text{ m}}_{\dots\dots\dots}} \qquad \underset{\text{w rzeczywistości}}{2\text{ mm}} \xrightarrow{\quad\dots\quad} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\underbrace{5\text{ dm}}_{\dots\dots\dots}}$$

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{3\text{ cm}} \xrightarrow{\quad\dots\quad} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\underbrace{6\text{ dm}}_{\dots\dots\dots\text{cm}}} \qquad \underset{\text{w rzeczywistości}}{500\text{ m}} \xrightarrow{\quad\dots\quad} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\underbrace{1\text{ km}}_{\dots\dots\dots}} \qquad \underset{\text{w rzeczywistości}}{5\text{ mm}} \xrightarrow{\quad\dots\quad} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\underbrace{5\text{ m}}_{\dots\dots\dots}}$$

Odp. (pionowo): 3 : 1; 200 : 1; 20 : 1; 4 : 1; 5 : 1; 2 : 1; 50 : 1; 250 : 1; 1000 : 1.

Jeśli w sytuacjach takich jak wyżej zdarzy Ci się zobaczyć jednostki dwumianowane, to nie przerażaj się, tylko zamień je na jednostki jednomianowane. Innymi słowy wybierz mniejszą jednostkę spośród podanych i postępuj jak wyżej, tj. podziel liczbę większą przez mniejszą. Zobacz przykłady:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\underbrace{3\text{ dm }20\text{ cm}}_{32\text{ cm}}} \xrightarrow{\quad 19:1\quad} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\underbrace{6\text{ m }8\text{ cm}}_{608\text{ cm}}} \qquad \underset{\text{w rzeczywistości}}{7\text{ mm}} \xrightarrow{\quad 8:1\quad} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\underbrace{5\text{ cm }6\text{ mm}}_{56\text{ mm}}} \qquad \underset{\text{w rzeczywistości}}{\underbrace{2\text{ cm }1\text{ mm}}_{21\ mm}} \xrightarrow{\quad 20:1\quad} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\underbrace{4\text{ dm }2\text{ cm}}_{420\text{ mm}}}$$

Ćwiczenie: Uzupełnij brakujące miejsca.

1 cm 3 mm $\xrightarrow{\dots}$ 6 cm 5 mm ....mm w rzeczywistości — ....mm po zastosowaniu skali	1 cm 1 mm $\xrightarrow{\dots}$ 8 cm 8 mm ....mm w rzeczywistości — ....mm po zastosowaniu skali	5 cm 1 mm $\xrightarrow{\dots}$ 4 dm 8 mm ....mm w rzeczywistości — ....mm po zastosowaniu skali
4 dm 3 cm $\xrightarrow{\dots}$ 8 dm 6 cm ....cm w rzeczywistości — ....cm po zastosowaniu skali	1 cm 6 mm $\xrightarrow{\dots}$ 6 cm 4 mm ....mm w rzeczywistości — ....mm po zastosowaniu skali	1 dm 7 cm $\xrightarrow{\dots}$ 4 m 8 cm ....cm w rzeczywistości — ....cm po zastosowaniu skali
6 dm 7 cm $\xrightarrow{\dots}$ 8 m 4 cm ....cm w rzeczywistości — ....cm po zastosowaniu skali	15 cm 1 mm $\xrightarrow{\dots}$ 3 dm 2 mm ....mm w rzeczywistości — ....mm po zastosowaniu skali	4 dm 2 cm $\xrightarrow{\dots}$ 5 m 4 cm ....cm w rzeczywistości — ....cm po zastosowaniu skali

Odp. (pionowo): 5 : 1; 2 : 1; 12 : 1; 8 : 1; 4 : 1; 2 : 1; 8 : 1; 24 : 1; 12 : 1.

Skala mianowana — dopisywanie jednostek długości do skali liczbowej

Do tej pory rozwiązując zadania ze skalą robiliśmy schemat polegający na narysowaniu strzałki, napisaniu skali oraz długości odcinka w rzeczywistości lub po zastosowaniu skali. Teraz zrobimy coś podobnego, ale nie będziemy rysować strzałki, a długość odcinka w rzeczywistości będziemy pisać po prawej stronie, a nie jak do tej pory po lewej.

W zamienianiu skali liczbowej na mianowaną chodzi tylko o to, by do obu liczb tworzących skalę dopisać te same jednostki i ewentualnie większą z liczb mianowanych zamienić na większe jednostki. Musisz jednak wiedzieć, że w przeciwieństwie do metody podanej na początku tego opracowania, tym razem liczba za dwukropkiem oznacza odległość w rzeczywistości, a przed dwukropkiem — na planie. Zobacz przykładowe zadania.

Zadanie: Zamień podaną skalę liczbową na mianowaną, a następnie odczytaj jaka odległość na planie odpowiada 1 mm w rzeczywistości (mapie).

a) 15 : 1 b) 50 : 1 c) 180 : 1 d) 100 000 : 1

Analiza zadania:

W treści zadania masz podane milimetry, więc dopisujesz je do obu liczb tworzących skalę liczbową.

Rozwiązanie:

a) 15 mm — 1 mm b) 50 mm — 1 mm c) 180 mm — 1 mm d) 100 000 mm — 1 mm

Zadanie: Zamień podaną skalę liczbową na mianowaną, a następnie odczytaj jaka odległość na planie odpowiada 1 cm w rzeczywistości.

a) 15 : 1 b) 50 : 1 c) 180 : 1 d) 100 000 : 1

Rozwiązanie:

a) 15 cm — 1 cm b) 50 cm — 1 cm c) 180 cm — 1 cm d) 100 000 cm — 1 cm

Ćwiczenie: Zamień podaną skalę liczbową na mianowaną, a następnie odczytaj jaka odległość na planie odpowiada 1 mm w rzeczywistości.

a) 40 : 1 b) 68 : 1 c) 150 : 1 d) 300 : 1 e) 1 000 : 1 f) 5000 : 1 g) 10 000 : 1

[Odp. a) 40 mm, b) 68 mm, c) 150 mm, d) 300 mm, e) 10000 mm, f) 5000 mm, g) 10000 mm.]

Ćwiczenie: Zamień podaną skalę liczbową na mianowaną, a następnie odczytaj jaka odległość na planie odpowiada 1 cm w rzeczywistości.

a) 40 : 1 b) 68 : 1 c) 150 : 1 d) 300 : 1 e) 1 000 : 1 f) 5000 : 1 g) 10 000 : 1

[Odp. a) 40 cm, b) 68 cm, c) 150 cm, d) 3 m, e) 10 m, f) 50 m, g) 100 m.]

Zadanie: Zamień podaną skalę liczbową na mianowaną, a następnie odczytaj jaka odległość na planie odpowiada 8 cm w rzeczywistości.

a) 200 : 1 b) 1000 : 1 c) 50 000 : 1 d) 2 250 000 : 1

Analiza zadania:

W treści zadania masz skalę liczbową oraz odległość wyrażoną w centymetrach. Dopisujesz więc do podanej skali liczbowej centymetry, a następnie obie liczby mnożysz przez 8, bo z treści zadania wiesz, że masz uzyskać po lewej stronie (na planie) dokładnie 8 cm.

Rozwiązanie:

a) 200 cm — 1 cm
$\underbrace{1600\ \mathrm{cm}}_{16\ \mathrm{m}}$ — 8 cm

b) 1000 cm — 1 cm
$\underbrace{8000\ \mathrm{cm}}_{80\ \mathrm{m}}$ — 8 cm

c) 50 000 cm — 1 cm
$\underbrace{400\,000\ \mathrm{cm}}_{4\ \mathrm{km}}$ — 8 cm

d) 2 250 000 cm — 1 cm
$\underbrace{18\,000\,000\ \mathrm{cm}}_{180\ \mathrm{km}}$ — 8 cm

Ćwiczenie: Zamień podaną skalę liczbową na mianowaną, a następnie odczytaj jaka odległość na planie odpowiada 6 mm w rzeczywistości.

a) 50 : 1 b) 100 : 1 c) 150 : 1 d) 200 : 1 e) 500 : 1 f) 1000 : 1 g) 500 000 : 1

[Odp. a) 30 cm, b) 60 cm, c) 90 cm, d) 120 cm, e) 3 m, f) 6 m, g) 3 km.]

Ćwiczenie: Zamień podaną skalę liczbową na mianowaną, a następnie odczytaj jaka odległość na planie odpowiada 12 cm w rzeczywistości.

a) 50 : 1 b) 100 : 1 c) 150 : 1 d) 200 : 1 e) 500 : 1 f) 1000 : 1 g) 500 000 : 1

[Odp. a) 6 m, b) 12 m, c) 18 m, d) 24 m, e) 60 m, f) 120 m, g) 60 km.]

Zadanie: Określ w jakiej skali jest wykonany plan, jeśli wiesz, że 1 mm w rzeczywistości odpowiada na planie:

a) 10 mm b) 100 mm c) 200 cm d) 4 m

Rozwiązanie:

a) 10 mm — 1 mm
10 : 1

b) 100 mm — 1 mm
100 : 1

c) 200 cm — 1 mm
2000 mm — 1 mm
2000 : 1

d) 4 m — 1 mm
4000 mm — 1 mm
4000 : 1

Ćwiczenie: Określ w jakiej skali jest wykonany plan, jeśli wiesz, że 1 mm w rzeczywistości, odpowiada na planie:

a) 8 mm b) 32 mm c) 40 cm d) 2 m e) 50 m f) 800 m g) 3 km

[Odp. a) 8 : 1, b) 32 : 1, c) 400 : 1, d) 2000 : 1, e) 50 000 : 1, f) 800 000 : 1, g) 3 000 000 : 1.]

Ćwiczenie: Określ w jakiej skali jest wykonany plan, jeśli wiesz, że 1 cm w rzeczywistości, odpowiada na planie:

a) 8 cm b) 32 cm c) 120 cm d) 2 m e) 50 m f) 800 m g) 3 km

[Odp. a) 8 : 1, b) 32 : 1, c) 120 : 1, d) 200 : 1, e) 5 000 : 1, f) 80 000 : 1, g) 300 000 : 1.]

Zadanie: Określ w jakiej skali jest wykonany plan, jeśli wiesz, że 4 cm w rzeczywistości odpowiadają na planie:

a) 4 m b) 300 m c) 2 km d) 60 km

Analiza zadania:

W treści zadania masz centymetry, a w podpunktach jednostki inne niż centymetry. Musisz więc najpierw pozamieniać wszystkie jednostki na centymetry. Chodzi o to, by mieć zgodność z jednostką podaną w treści zadania. Mając już te same jednostki, musisz każdą z liczb tworzących skalę mianowaną podzielić przez 4 cm, bo taką właśnie liczbę masz w treści zadania.

Rozwiązanie:

b) 4 m — 4 cm
4000 mm — 4 cm
1000 : 1

b) 300 m — 4 cm
300 000 mm — 4 cm
75 000 : 1

c) 2 km — 4 cm
2 000 000 mm — 4 cm
500 000 : 1

d) 60 km — 4 cm
60 000 000 mm — 4 cm
15 000 000 : 1

Ćwiczenie: Określ w jakiej skali jest wykonany plan, jeśli wiesz, że 8 mm w rzeczywistości odpowiadają na planie:

a) 8 mm b) 32 mm c) 40 cm d) 2 m e) 50 m f) 800 m g) 3 km

[Odp. a) 1 : 1, b) 4 : 1, c) 5 : 1, d) 250 : 1, e) 6250 : 1, f) 100 000 : 1, g) 375 000 : 1.]

Ćwiczenie: Określ w jakiej skali jest wykonany plan, jeśli wiesz, że 12 cm w rzeczywistości odpowiadają na planie:

a) 12 cm b) 48 cm c) 120 cm d) 204 cm e) 6 m f) 80 m 4 cm g) 3 km

[Odp. a) 1 : 1, b) 4 : 1, c) 10 : 1, d) 17 : 1, e) 50 : 1, f) 667 : 1, g) 25 000 : 1.]

Zadanie: Zamień podaną skalę liczbową na mianowaną, a następnie odczytaj jaka jest odległość w rzeczywistości, jeśli na planie wynosi ona 1240 m.

a) 200 : 1 b) 1000 : 1 c) 40 000 : 1 d) 2 250 000 : 1

Analiza zadania:

W treści zadania masz skalę liczbową oraz odległość wyrażoną w metrach. Możesz do obu liczb skali liczbowej dopisać metry, ale nie będzie to wygodne. W tym zadaniu wygodniejsze będą centymetry lub milimetry. Przerabiasz więc skalę liczbową na mianowaną i dodatkowo liczbę z treści zdania tj. 1240 m zamieniasz na centymetry lub milimetry — musisz mieć bowiem te same jednostki. Potem ustalasz, czy większa z liczb tworzących skalę mianowaną została pomnożona czy podzielona i przez ile. Gdy to zrobisz, to takie samo działanie wykonujesz na drugiej liczbie.

Rozwiązanie:

a) 200 cm — 1 cm
$\underbrace{1240\ \mathrm{m}}_{124\,000\ \mathrm{cm}}$ — x cm

$x = 124000\ \mathrm{cm} : 200\ \mathrm{cm}$
$x = 620$

b) 1000 cm — 1 cm
$\underbrace{1240\ \mathrm{m}}_{124\,000\ \mathrm{cm}}$ — x cm

$x = 124000\ \mathrm{cm} : 1000\ \mathrm{cm}$
$x = 124$

c) 40 000 mm — 1 mm
$\underbrace{1240\ \mathrm{m}}_{1\,240\,000\ \mathrm{mm}}$ — x mm

$x = 1\,240\,000\ \mathrm{mm} : 40\,000\ mm$
$x = 31$

d) 2 250 000 mm — 1 mm
$\underbrace{1240\ \mathrm{m}}_{1\,240\,000\ \mathrm{mm}}$ — x mm

$x = 1\,240\,000\ \mathrm{mm} : 2\,250\,000\ \mathrm{mm}$
$x = ?$

Aby obliczyć ile wynosi x, musisz znać ułamki dziesiętne okresowe, lub jednostki mniejsze od milimetra. Wynik bowiem to $x = 0{,}55(1)$.

Spostrzeżenie: Wyniki końcowe wyszły bez jednostek, bo jednostki już były napisane przy x w drugiej linijce.

Inne podejście do zadań (bardziej rachunkowe):

Przypuśćmy, że masz skalę 4 : 1. Do obu tych liczb dopisujesz te same jednostki — najlepiej dopisywać milimetry. Masz zatem 4 mm : 1 mm. Liczba po lewej stronie dwukropka oznacza odległość na planie, a liczba za dwukropkiem odległość w rzeczywistości (w terenie). Jeśli z treści zadania wiesz, że odległość na planie wynosi np. 20 mm, po lewej stronie dwukropka piszesz 20 mm, a za dwukropkiem piszesz liczbę x. Masz zatem:

$4 \text{ mm} : 1 \text{ mm}$ Nie możesz zamiast dwukropka pisać znaku równości, bo 4 mm nie są równe 1 mm. Dwukropek możesz zastąpić myślnikiem,

$20 \text{ mm} : x$ bo liczba po lewej stronie pokazuje odległość na planie, a po prawej w rzeczywistości.

Aby wyliczyć *x* czyli odległość w rzeczywistości, musisz najpierw się dowiedzieć przez ile została pomnożona pierwsza czerwona liczba — wykonujesz zatem działanie:

$$20 \text{ mm} : 4 \text{ mm} = 5$$

Oznacza to, że pierwszą zieloną liczbę musisz pomnożyć przez 5. Robiąc tak dostajesz

$$x = 1 \text{ mm} \cdot 5 = 5 \text{ mm}.$$

No i masz już wyliczony x. Zobacz inny przykład.

Przypuśćmy, że masz skalę 5 : 1. Do obu tych liczb dopisujemy te same jednostki — najlepiej dopisywać milimetry. Masz zatem 5 mm : 1 mm. Liczba po lewej stronie dwukropka oznacza odległość na planie, a liczba za dwukropkiem odległość w rzeczywistości (w terenie). Jeśli z treści zadania wiesz, że odległość w rzeczywistości wynosi np. 35 mm, po prawej stronie dwukropka piszesz 35 mm, a przed dwukropkiem piszesz liczbę x. Masz zatem:

$$5 \text{ mm} : 1 \text{ mm}$$

$$x : 35 \text{ mm}$$

Aby wyliczyć *x* czyli odległość w rzeczywistości, musisz najpierw się dowiedzieć przez jaką liczbę została pomnożona pierwsza zielona liczba. W tym celu wykonujesz działanie:

$$35 \text{ mm} : 1\text{mm} = 35$$

i otrzymaną przed chwilą liczbę tj. 35 mnożysz przez liczbę czerwoną tj. przez 5 mm. Otrzymujesz więc:

$$x = 35 \cdot 5 \text{ mm} = 175 \text{ mm}$$

Powyżej zaprezentowana metoda, choć jest popularna, to ma jeden mankament. Nie można za jej pomocą rozwiązywać wszystkich typów zadań ze skalą pomniejszającą. Przykładowo nie można rozwiązać takiego zadania: „Ziarenko pisaku ma wymiary 1 mm × 1 mm × 1 mm. Po zastosowaniu powiększającej to samo ziarenko ma wymiary 2 cm × 2 cm × 2 cm. W jakiej skali wykonano powiększenie tego ziarenka?”

Zobacz przykładowe zadania pokazujące jak rozwiązuje się zadania ze skali wykorzystując tę metodę.

Zadanie: Łepek zapałki ma długość 2 mm. Jaką będzie on mieć długość, jeśli zapałka zostanie narysowana w skali 12 : 1?

Rozwiązanie:

$12 \text{ mm} : 1 \text{ mm}$ — dopisanie mm do liczb tworzących skalę

$x : 2 \text{ mm}$ — x jest przed dwukropkiem, bo nie znamy odległości po zastosowaniu skali.

$$2 \text{ mm} : 1 \text{ mm} = 2$$

$$x = 2 \cdot 12 \text{ mm} = 24 \text{ mm}$$

Odpowiedź: Łepek tej zapałki po narysowaniu w skali 12 : 1 będzie mieć długość 24 mm czyli 2 cm 4 mm.

Zadanie: Łepek zapałki na rysunku wykonanym w skali 60 : 1 ma długość 12 cm. Jaką długość ma łepek tej zapałki w rzeczywistości?

Rozwiązanie:

$$60\text{ cm} : 1\text{ cm}$$ — dopisanie cm do liczb tworzących skalę

$$12\text{ cm} : x$$ — x jest za dwukropkiem, bo nie znamy odległości w rzeczyw.

$$60\text{ cm} : 12\text{ cm} = 5$$

Ponieważ pierwszą czerwoną liczbę zmniejszono 5 razy, więc pierwszą zieloną liczbę też trzeba zmniejszyć 5 razy. Aby to móc zrobić, trzeba najpierw zamienić 1 cm na milimetry. Zatem:

$$x = 1\text{ cm} : 5 = 10\text{ mm} : 5 = 2\text{ mm}$$

Odpowiedź: Łepek tej zapałki w rzeczywistości ma długość 2 mm.

Ćwiczenie: 30.06.1908 r. na Syberii doszło do eksplozji która powaliła drzewa. Na mapie wykonanej w skali 1 : 2 000 000 średnica obszaru na którym były powalone drzewa wynosiła 4 cm. Ile kilometrów w terenie wynosiła średnica obszaru z powalonymi drzewami? [Odp. 80 km]

Temat: Jak superszybko rozwiązywać zadania ze skal na mapach i planach?

W temacie tym przedstawię szybkie podsumowanie tego o czym szczegółowo mówiliśmy w dwóch pierwszych tematach tego opracowania.

Niech literka *d* oznacza liczbę w skali pomniejszającej stojącą za dwukropkiem.

Niech literka *d* oznacza liczbę w skali powiększającej stojącą przed dwukropkiem.

Tabelka dla skali pomniejszającej — długość odcinka.

kolumna A długość odcinka w rzeczywistości (w terenie)	kolumna B skala mapy (planu) 1 : *d*	kolumna C długość odcinka na mapie lub planie	postępowanie
znamy	*znamy*	*szukamy*	Liczbę z kolumny A podziel przez *d*. Jednostki pozostaw bez zmian. Jeśli liczba w kolumnie A jest wyrażona w kilku jednostkach np. 5 m 7 cm, to najpierw ją zamień np. na centymetry, a dopiero potem postępuj zgodnie z tym co zostało napisane wyżej.
szukamy	*znamy*	*znamy*	Liczbę z kolumny C pomnóż przez *d*. Jednostki pozostaw bez zmian. Jeśli liczba w kolumnie C jest wyrażona w kilku jednostkach np. 5 m 7 cm, to najpierw ją zamień np. na centymetry, a dopiero potem postępuj zgodnie z tym co zostało napisane wyżej.
znamy	*szukamy*	*znamy*	Najpierw liczby z kolumn A i C wyraź w tych samych jednostkach, a następnie większą z tych liczb podziel przez mniejszą. Jako odpowiedź napisz skalę mającą przed dwukropkiem liczbę 1, a za dwukropkiem liczbę przed chwilą wyliczoną.

Tabelka dla skali powiększającej — długość odcinka.

kolumna A długość odcinka w rzeczywistości (w terenie)	kolumna B skala mapy (planu) *d* : 1	kolumna C długość odcinka na mapie lub planie	postępowanie
znamy	*znamy*	*szukamy*	Liczbę z kolumny A pomnóż przez *d*. Jednostki pozostaw bez zmian. Jeśli liczba w kolumnie A jest wyrażona w kilku jednostkach np. 5 m 7 cm, to najpierw ją zamień np. na centymetry, a dopiero potem postępuj zgodnie z tym co zostało napisane wyżej.
szukamy	*znamy*	*znamy*	Liczbę z kolumny C podziel przez *d*. Jednostki pozostaw bez zmian. Jeśli liczba w kolumnie C jest wyrażona w kilku jednostkach np. 5 m 7 cm, to najpierw ją zamień np. na centymetry, a dopiero potem postępuj zgodnie z tym co zostało napisane wyżej.
znamy	*szukamy*	*znamy*	Najpierw liczby z kolumn A i C wyraź w tych samych jednostkach, a następnie większą z tych liczb podziel przez mniejszą. Jako odpowiedź napisz skalę mającą przed dwukropkiem liczbę przed chwilą wyliczoną, a za dwukropkiem liczbę 1.

Tabelka dla skali pomniejszającej — pole powierzchni.

kolumna A	kolumna B	kolumna C	postępowanie
pole powierzchni w rzeczywistości	skala mapy (planu) 1 : d	pole powierzchni na mapie lub planie	
znamy	*znamy*	*szukamy*	Najpierw zamień liczbę z kolumny A na jakieś małe jednostki pola np. na mm^2 lub cm^2. Potem podziel liczbę z kolumny A przez liczbę d^2.
szukamy	*znamy*	*znamy*	Liczbę z kolumny C pomnóż przez d^2. Zamień otrzymaną liczbę na większe jednostki pola np. na km^2 lub hektary.
znamy	*szukamy*	*znamy*	Najpierw liczby z kolumn A i C wyraź w tych samych jednostkach, a następnie większą z tych liczb podziel przez mniejszą. Wylicz pierwiastek drugiego stopnia z otrzymanej przed chwilą liczby. Jako odpowiedź napisz skalę mającą przed dwukropkiem liczbę 1, a za dwukropkiem przed chwilą spierwiastkowaną liczbę.

Tabelka dla skali powiększającej — pole powierzchni.

kolumna A	kolumna B	kolumna C	postępowanie
pole powierzchni w rzeczywistości	skala mapy (planu) d : 1	pole powierzchni na mapie lub planie	
znamy	*znamy*	*szukamy*	Pomnóż liczbę z kolumny A przez liczbę d^2. Zamień jednostki w kolumnie C np. na hektary.
szukamy	*znamy*	*znamy*	Liczbę z kolumny C podziel przez liczbę d^2. Zamień otrzymaną liczbę na mniejsze jednostki pola np. na mm^2 lub cm^2.
znamy	*szukamy*	*znamy*	Najpierw liczby z kolumn A i C wyraź w tych samych jednostkach, a następnie większą z tych liczb podziel przez mniejszą. Wylicz pierwiastek z otrzymanej przed chwilą liczby. Jako odpowiedź napisz skalę mającą przed dwukropkiem przed chwilą spierwiastkowaną liczbę, a za dwukropkiem liczbę 1.

Tabelka dla skali pomniejszającej — objętość brył.

kolumna A	kolumna B	kolumna C	postępowanie
pole powierzchni w rzeczywistości	skala mapy (planu) 1 : d	pole powierzchni na mapie lub planie	
znamy	*znamy*	*szukamy*	Najpierw zamień liczbę z kolumny A na jakieś małe jednostki objętości np. na mm^3 lub cm^3. Potem podziel liczbę z kolumny A przez liczbę d^3.
szukamy	*znamy*	*znamy*	Liczbę z kolumny C pomnóż przez liczbę d^3. Zamień otrzymaną liczbę na większe jednostki objętości np. na km^3 lub hektolitry.
znamy	*szukamy*	*znamy*	Najpierw liczby z kolumn A i C wyraź w tych samych jednostkach, a następnie większą z tych liczb podziel przez mniejszą. Wylicz pierwiastek 3-ciego stopnia z otrzymanej przed chwilą liczby. Jako odpowiedź napisz skalę mającą przed dwukropkiem liczbę 1, a za dwukropkiem przed chwilą spierwiastkowaną liczbę.

Tabelka dla skali powiększającej — objętość brył.

kolumna A	kolumna B	kolumna C	postępowanie
pole powierzchni w rzeczywistości	skala mapy (planu) d : 1	pole powierzchni na mapie lub planie	
znamy	*znamy*	*szukamy*	Pomnóż liczbę z kolumny A przez liczbę d^3. Zamień jednostki w kolumnie C np. na km^3.
szukamy	*znamy*	*znamy*	Liczbę z kolumny C podziel przez liczbę d^3. Zamień otrzymaną liczbę na mniejsze jednostki objętości np. na mm^3 lub cm^3.
znamy	*szukamy*	*znamy*	Najpierw liczby z kolumn A i C wyraź w tych samych jednostkach, a następnie większą z tych liczb podziel przez mniejszą. Wylicz pierwiastek 3-ciego stopnia z otrzymanej przed chwilą liczby. Jako odpowiedź napisz skalę mającą przed dwukropkiem przed chwilą spierwiastkowaną liczbę, a za dwukropkiem liczbę 1.

Temat: Porównywanie skal liczbowych.

Różne mapy mają różne skale — tyle już wiesz. Wiesz także, że niektóre mapy pokazują więcej szczegółów, a inne mniej. Teraz dowiesz się, że im więcej szczegółów pokazuje mapa tym jej skala jest większa. Innymi słowy, jeśli masz dwie mapy, z czego pierwsza jest w skali np. 1 : 100 000 a druga w skali 1 : 500 000, to pierwsza mapa pokazuje więcej szczegółów niż druga. Dlatego właśnie skala 1 : 100 000 jest większa od skali 1 : 500 000.

Zadanie: Która z podanych skal jest większa?

a)	1 : 10	czy	1 : 30	Odp. Większa jest skala 1 : 10.
b)	1 : 120	czy	1 : 1000	Odp. Większa jest skala 1 : 120.
c)	1 : 400	czy	1 : 200	Odp. Większa jest skala 1 : 200.
d)	5 : 1	czy	8 : 1	Odp. Większa jest skala 8 : 1.
e)	50 : 1	czy	16 : 1	Odp. Większa jest skala 50 : 1.
f)	70 : 1	czy	1 : 100	Odp. Większa jest skala 100 : 1.
g)	100 : 1	czy	1 : 100	Odp. Większa jest skala 100 : 1.

Analizując powyższe zadanie łatwo zauważyć, że:

– w przypadku skal pomniejszających, większa jest ta, która ma mniejszą liczbę za dwukropkiem

– w przypadku skal powiększających, większa jest ta, która ma większą liczbę przed dwukropkiem.

Zapamiętaj:

Im więcej szczegółów widać na mapie,
tym skala jest większa.

Ćwiczenie: Która z podanych skal jest większa?

a)	1 : 100	czy	1 : 80	[Odp. 1 : 80]
b)	1 : 1000	czy	1 : 5000	[Odp. 1 : 1000]
c)	1 : 800	czy	1 : 500	[Odp. 1 : 500]
d)	25 : 1	czy	28 : 1	[Odp. 28 : 1]
e)	5 : 1	czy	10 : 1	[Odp. 10 : 1]
f)	1000 : 1	czy	100 : 1	[Odp. 1000 : 1]
g)	1 : 700	czy	700 : 1	[Odp. 700 : 1]

To jeszcze nie wszystko jeśli chodzi o porównywanie skal. Zauważ, że mając w ręku dwie identyczne kartki papieru, możesz na nich przedstawić obszary o różnej wielkości. Im mniejszą skalę zastosujesz, tym większy obszar zmieścisz na kartce. Przykładowo masz dwie identyczne kartki. Na jednej z nich przedstawiasz mapę np. Polski w skali 1 : 2 000 000, a na drugiej także mapę Polski ale w skali np. 1 : 100 000 000. Na pierwszej kartce będzie widoczna głównie Polska i tylko niewielkie fragmenty państw sąsiadujących z Polską. Na drugiej zaś kartce, oprócz całej powierzchni Polski zobaczysz także powierzchnię Europy — większy obszar, ale kosztem mniejszej ilości szczegółów.

Zapamiętaj:

Im mniejsza jest skala mapy,
tym większy obszar można pokazać na danej kartce,
ale kosztem mniejszej ilości szczegółów.

Temat: Ułamki dziesiętne w zadaniach ze skalą.

Znasz już różne metody rozwiązywania zadań ze skalą. W temacie tym swoją wiedzę rozszerzysz o zadania w których pojawiają się ułamki dziesiętne. Dodatkowo każde zadanie będzie rozwiązane obiema wcześniej poznanymi metodami — możesz sobie wybrać jedną z nich tj. tę, która jest dla Ciebie łatwiejsza do zrozumienia. Zobacz przykładowe zadania zarówno na skalę pomniejszającą jak i powiększającą.

Zadanie: Na mapie wykonanej w skali 1 : 20 000 000 odległość w linii prostej między stolicą Polski — Warszawą, a stolicą Hiszpanii — Madrytem wynosi 11,45 cm. Jaka jest odległość między tymi miastami w terenie (w linii prostej)?

Analiza zadania:

metoda 1

Znasz skalę, czyli rysujesz sobie strzałkę i piszesz nad nią 1 : 20 000 000. Wracasz się do treści zadania i czytasz, że odległość na mapie wynosi 11,45 cm. Ponieważ jest to odległość na mapie, a nie w terenie, więc piszesz ją po prawej stronie strzałki. Robisz więc schemat:

$$\underset{\text{w terenie}}{\ldots} \xrightarrow{1\,:\,20\,000\,000} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{11{,}45\ \text{cm}}$$

Ponieważ skala 1 : 20 000 000 pomniejsza liczbę z lewej strony strzałki dokładnie 20 0000 000 razy, więc by znaleźć tę liczbę, musisz tę liczbę co jest po prawej stronie strzałki, pomnożyć przez liczbę stojącą za dwukropkiem, czyli przez 20 000 000.

metoda 2

Znasz skalę, więc możesz ją przerobić na skalę mianowaną tj. dopisać do obu jej liczb te same jednostki. Ponieważ w treści zadania odległość na mapie jest dana w centymetrach, więc do liczb tworzących skalę dopisujesz centymetry. Masz więc:

$$1\ \text{cm} : 20\,000\,000\ \text{cm}$$

Ponieważ odległość w terenie jest po prawej stronie dwukropka, a z treści zadania tej odległości nie znasz, więc za dwukropkiem piszesz x. Przed dwukropkiem piszesz zaś liczbę z treści zadania przedstawiającą odległość na mapie. Masz więc:

$$11{,}45\ \text{cm} : x$$

Ponieważ druga czerwona liczba została otrzymana z pomnożenia pierwszej czerwonej liczby przez 11,45, więc pierwszą zieloną liczbę też trzeba pomnożyć przez 11,45.

Rozwiązanie:

metoda 1: $$11{,}45\ \text{cm} \cdot 20\,000\,000 = 229\,000\,000\ \text{cm} = 2\,290\ \text{km}$$

metoda 2: $$11{,}45 \cdot 20\,000\,000\ \text{cm} = 229\,000\,000\ \text{cm} = 2\,290\ \text{km}$$

Odp. W terenie odległość w linii prostej między Warszawą a Madrytem wynosi 2290 km.

Jeśli umiesz rozwiązywać równania — w szczególności proporcje, to do rozwiązania powyższego zadania możesz zastosować metodę jeszcze inną niż dwie powyższe. W metodzie tej należy ułożyć proporcję — dane z metody 2 należy wypisać albo w poziomie albo w pionie. Należy jednak zauważyć, że nie używa się w niej skali mianowanej.

metoda 3

proporcja 1 (dane wypisane w pionie)
[proporcję rozwiązuje się wykonując mnożenie po skosie]

$$\frac{1}{20\,000\,000} = \frac{11{,}45\ \text{cm}}{x}$$

$$1x = 20\,000\,000 \cdot 11{,}45\ \text{cm}$$

$$x = 229\,000\,000\ \text{cm} = 2\,290\ \text{km}$$

proporcja 2 (dane wypisane w poziomie)
[proporcję rozwiązuje się wykonując mnożenie po skosie]

$$\frac{1}{11{,}45\ \text{cm}} = \frac{20\,000\,000}{x}$$

$$1x = 11{,}45 \cdot 20\,000\,000\ \text{cm}$$

$$x = 229\,000\,000\ \text{cm} = 2\,290\ \text{km}$$

Zadanie: W terenie, odległość mierzona w linii prostej z Tarnowa do Rzeszowa wynosi 72 km. Jaka jest odległość w linii prostej między tymi miastami na mapie w skali 1 : 2 250 000?

Analiza zadania:

metoda 1

Znasz skalę, czyli rysujesz sobie strzałkę i piszesz nad nią 1 : 2 250 000. Wracasz się do treści zadania i czytasz, że odległość w terenie wynosi 72 km. Ponieważ jest to odległość w terenie, a nie na mapie, więc piszesz ją po lewej stronie strzałki. Robisz więc schemat:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{72\text{ km}} \xrightarrow{1:2\,250\,000} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\dots}$$

Ponieważ skala 1 : 2 250 000 pomniejsza liczbę z lewej strony strzałki dokładnie 2 250 000 razy, więc by znaleźć liczbę z prawej strony strzałki, musisz liczbę z lewej strony strzałki, podzielić przez liczbę stojącą za dwukropkiem, czyli przez 2 250 000.

metoda 2

Znasz skalę, więc możesz ją przerobić na skalę mianowaną tj. dopisać do obu jej liczb te same jednostki. Ponieważ w treści zadania odległość w terenie jest dana w kilometrach, więc do liczb tworzących skalę dopisujesz kilometry. Masz więc:

$$1\text{ km} : 2\,250\,000\text{ km}$$

Ponieważ odległość w terenie jest po prawej stronie dwukropka, a z treści zadania wynosi ona 72 km, więc za dwukropkiem piszesz 72 km, a przed dwukropkiem x. Masz więc:

$$x : 72\text{ km}$$

Ponieważ pierwsza zielona liczba została zmniejszona, więc pierwszą czerwoną liczbę tj. 1 km też trzeba zmniejszyć i to tyle samo razy. By dowiedzieć się ile razy, trzeba najpierw pierwszą zieloną liczbę podzielić przez drugą zieloną liczbę tj. przez 72 km. Potem trzeba 1 km zamienić na jednostki mniejsze np. na centymetry i otrzymaną liczbę podzielić przez wcześniej otrzymany wynik.

Rozwiązanie:

metoda 1:

$$72\text{ km} : 2\,250\,000 = 0{,}000032\text{ km} = 3{,}2\text{ cm}$$

metoda 2:

$$2\,250\,000\text{ km} : 72\text{ km} = 31\,250$$

$$1\text{ km} = 100000\text{ cm}$$

$$100000\text{ cm} : 31250 = 3{,}2\text{ cm}$$

Odp. W mapie w skali 1 : 2 250 000 odległość między tymi miastami wynosi 3,2 cm czyli 3 cm 2 mm.

Jeśli umiesz rozwiązywać równania — w szczególności proporcje, to do rozwiązania powyższego zadania możesz zastosować metodę jeszcze inną niż dwie powyższe. W metodzie tej należy ułożyć proporcję — dane z metody 2 należy wypisać albo w poziomie albo w pionie. Należy jednak zauważyć, że nie używa się w niej skali mianowanej.

metoda 3

proporcja 1 (dane wypisane w pionie)
[proporcję rozwiązuje się wykonując mnożenie po skosie]

$$\frac{1}{2\,250\,000} = \frac{x}{72\text{ km}}$$

$$1 \cdot 72\text{ km} = 2\,250\,000 \cdot x \;/: 2\,250\,000$$

$$\frac{72\text{ km}}{2\,250\,000} = x$$

$$\underbrace{0{,}000032\text{ km}}_{3{,}2\text{ cm}} = x$$

proporcja 2 (dane wypisane w poziomie)
[proporcję rozwiązuje się wykonując mnożenie po skosie]

$$\frac{1}{x} = \frac{2\,250\,000}{72\text{ km}}$$

$$1 \cdot 72\text{ km} = x \cdot 2\,250\,000 \;/: 2\,250\,000$$

$$\frac{72\text{ km}}{2\,250\,000} = x$$

$$\underbrace{0{,}000032\text{ km}}_{3{,}2\text{ cm}} = x$$

Zadanie: Największe wirusy osiągają średnicę 400 nm, (1 nm = 0,000000001 m). Jaki rozmiar będą mieć te wirusy w skali 500 000 : 1?

Analiza zadania:

metoda 1

Znasz skalę, czyli rysujesz sobie strzałkę i piszesz nad nią 500 000 : 1. Wracasz się do treści zadania i czytasz, że rozmiar tych wirusów w rzeczywistości wynosi 400 nm (nanometrów). Piszesz więc po lewej stronie strzałki liczbę 400 nm. Robisz więc schemat:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{400\text{ nm}} \xrightarrow{500\,000\ :\ 1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{\dots}$$

Ponieważ skala 500 000 : 1 powiększa liczbę z lewej strony strzałki dokładnie 500 000 razy, więc by znaleźć liczbę z prawej strony strzałki, musisz liczbę z lewej strony strzałki, pomnożyć przez liczbę stojącą przed dwukropkiem, czyli przez 500 000.

metoda 2

Znasz skalę, więc możesz ją przerobić na skalę mianowaną tj. dopisać do obu jej liczb te same jednostki. Ponieważ w treści zadania są dane nanometry (nm), więc do obu liczb tworzących skalę dopisz nm. Masz zatem:

$$500\,000\text{ nm} : 1\text{ nm}$$

Ponieważ liczba po prawej stronie dwukropka oznacza długość w rzeczywistości, a z treści zadania wynosi ona 400 nm (nanometrów), więc za dwukropkiem piszesz 400 nm, a przed dwukropkiem x. Masz więc:

$$x : 400\text{ nm}$$

Ponieważ pierwsza zielona liczba została zwiększona, 400 razy, więc pierwszą czerwoną liczbę tj. 500 000 nm też trzeba zwiększyć 400 razy.

Rozwiązanie:

metoda 1:

$$400\text{ nm} \cdot 500\,000 = \underbrace{200\,000\,000\text{ nm}}_{1\text{ cm}=10\,000\,000\text{ nm}} = 20\text{ cm}$$

metoda 2:

$$500\,000\text{ nm} \cdot 400 = \underbrace{200\,000\,000\text{ nm}}_{1\text{ cm}=10\,000\,000\text{ nm}} = 20\text{ cm}$$

Odp. Największe wirusy w skali 500 000 : 1 osiągają średnicę 20 cm.

Jeśli umiesz rozwiązywać równania — w szczególności proporcje, to do rozwiązania powyższego zadania możesz zastosować metodę jeszcze inną niż dwie powyższe. W metodzie tej należy ułożyć proporcję — dane z metody 2 należy wypisać albo w poziomie albo w pionie. Należy jednak zauważyć, że nie używa się w niej skali mianowanej.

nano — jedna miliardowa jakiejś wielkości
nm (nanometr) — jedna miliardowa metra

Wnioski:

1 m = 1 000 000 000 nm
100 cm = 1 000 000 000 nm /: 100

$\boxed{1\text{ cm} = 10\,000\,000\text{ nm}}$

Skoro

$\boxed{10\,000\,000\text{ nm} = 1\text{ cm}}$

więc

by zamienić nanometry na centymetry należy skreślić 7 ostatnich zer, czyli przesunąć przecinek o 7 miejsc w lewo.

metoda 3

proporcja 1 (dane wypisane w pionie)
[proporcję rozwiązuje się wykonując mnożenie po skosie]

$$\frac{500\,000}{1} = \frac{x}{400\text{ mm}}$$

$$500\,000 \cdot 400\text{ nm} = 1 \cdot x$$

$$200\,000\,000\text{ nm} = x$$

$$20\text{ cm} = x$$

proporcja 2 (dane wypisane w poziomie)
[proporcję rozwiązuje się wykonując mnożenie po skosie]

$$\frac{500\,000}{x} = \frac{1}{400\text{ nm}}$$

$$500\,000 \cdot 400\text{ nm} = x \cdot 1$$

$$200\,000\,000\text{ nm} = x$$

$$20\text{ cm} = x$$

Zadanie*: W skali 1 000 000 000 000 : 1 atom wodoru ma jądro o średnicy 1 mm i promień o długości 50 m. Oblicz ile femtometrów ma jądro i promień atomu wodoru w rzeczywistości, wiedząc, że 1 metr ma biliard femtometrów (1 m = 1 000 000 000 000 000 fm).

Analiza zadania:

metoda 1

Znasz skalę, czyli rysujesz sobie strzałkę i piszesz nad nią 1 000 000 000 000 : 1. Wracasz się do treści zadania i czytasz, że rozmiar jądra atomu wodoru po zastosowaniu skali wynosi 1 mm. Piszesz więc po prawej stronie strzałki liczbę 1 mm. Robisz więc schemat:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\dots} \xrightarrow{1\,000\,000\,000\,000\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{1\text{ mm}}$$

Wracasz się do treści zadania i czytasz, że promień tego atomu po zastosowaniu skali ma długość 50 m. Ponownie robisz schemat jak wyżej, ale tym razem po prawej stronie strzałki wpisujesz 50 m. Masz zatem:

$$\underset{\text{w rzeczywistości}}{\dots} \xrightarrow{1\,000\,000\,000\,000\,:\,1} \underset{\text{po zastosowaniu skali}}{50\text{ m}}$$

Ponieważ skala 1 000 000 000 000 : 1 powiększa liczbę z lewej strony strzałki dokładnie bilion razy, więc by znaleźć liczbę z lewej strony strzałki, musisz liczbę z prawej strony strzałki, podzielić przez liczbę stojącą przed dwukropkiem, czyli przez bilion. Nim to jednak zrobisz, warto liczby które są po prawej stronie strzałki tj. 1 mm oraz 50 m zamienić na femtometry.

Przypominam, że przy dzieleniu liczby przez bilion przecinek należy przesunąć o 12 miejsc w lewo, bo bilion ma 12 zer.

metoda 2

Znasz skalę, więc możesz ją przerobić na skalę mianowaną tj. dopisać do obu jej liczb te same jednostki. Ponieważ w treści zadania są dane femtometry (fm) oraz milimetry i metry, więc do obu liczb tworzących skalę najwygodniej dopisać femtometry — bo są najmniejsze spośród tych trzech jednostek. Masz zatem:

$$1\,000\,000\,000\,000\text{ fm} : 1\text{ fm}$$

Ponieważ liczba po lewej stronie dwukropka oznacza odległość po zastosowaniu skali, a z treści zadania wynosi ona 1 mm, więc przed dwukropkiem piszesz 1 mm, a za dwukropkiem x. Masz więc:

$$1\text{ mm} : x$$

Z treści zadania wiesz, że:

$$1\text{ m} = 1\,000\,000\,000\,000\,000\text{ fm}$$

Ponieważ $1\text{ m} = 1000\text{ mm}$, więc zamiast 1 m piszesz 1000 mm. Masz zatem:

$$1000\text{ mm} = 1\,000\,000\,000\,000\,000\text{ fm} \quad /:1000$$

$$\boxed{1\text{ mm} = 1\,000\,000\,000\,000\text{ fm}}$$

Tak więc:

$$1\,000\,000\,000\,000\text{ fm} : 1\text{ fm}$$

$$1\,000\,000\,000\,000\text{ fm} : x$$

Ponieważ pierwsza czerwona liczba została pomnożona przez 1, więc pierwszą zieloną liczbę trzeba także pomnożyć przez 1.

Aby obliczyć promień atomu wodoru musisz napisać:

$$1\,000\,000\,000\,000\text{ fm} : 1\text{ fm}$$

$$\underbrace{50\,000\,000\,000\,000\,000\text{ fm}}_{50\text{ m}} : x$$

Rozwiązanie:

metoda 1:

$$1\,000\,000\,000\,000\text{ fm} : 1\,000\,000\,000\,000 = 1\text{ fm}$$

$$\underbrace{50\text{ m}}_{50\,000\,000\,000\,000\,000\text{ fm}} : 1\,000\,000\,000\,000 = 50\,000\text{ fm}$$

metoda 2:

$$x = 1\text{ fm} \cdot 1 = 1\text{ fm}$$

$$x = 1\text{ fm} \cdot 50\,000 = 50\,000\text{ fm}$$

Odp. W rzeczywistości średnica jądra atomu wodoru to 1 fm, a długość promienia to 50 000 fm.

Ćwiczenie: Najmniejsze ziarenka piasku wykonane w skali 500 : 1 osiągają rozmiary rzędu 31,25 mm. Jakie rozmiary mają najmniejsze ziarenka piasku w rzeczywistości? [Odp. 0,0625 mm]

Ćwiczenie: Ludzkie włosy osiągają grubość (czyli średnicę przekroju) od 0,02 mm do 0,08 mm. Jakie grubości mogą mieć ludzkie włosy w skali 400 : 1? [Odp. Od 8 mm do 32 mm.]

Zadanie*: Powierzchnia pewnego jeziora wynosi 2400 ha. Ile mm^2 zajmuje powierzchnia tego jeziora na mapie wykonanej w skali 1 : 5 000 000?

Analiza zadania:

$1\ \mathrm{mm} : 5\ 000\ 000\ \mathrm{mm}$ — obie strony podnosisz do potęgi 2, by z mm przejść na mm^2

$1\ \mathrm{mm}^2 : 25\ 000\ 000\ 000\ 000\ \mathrm{mm}^2$

Powierzchnię jeziora też wyrażasz w mm^2 by mieć te same jednostki co wyżej.

$$2400\ \mathrm{ha} = 2400 \cdot 10000\ \mathrm{m}^2 = 2400 \cdot 10000 \cdot 10000\ \mathrm{cm}^2 = 2400 \cdot 10000 \cdot 10000 \cdot 100\ \mathrm{mm}^2 =$$
$$= 24\ 000\ 000\ 000\ 000\ \mathrm{mm}^2$$

Zestawienie danych:

$$1\ \mathrm{mm}^2 : 25\ 000\ 000\ 000\ 000\ \mathrm{mm}^2$$
$$x : 24\ 000\ 000\ 000\ 000\ \mathrm{mm}^2$$

Rozwiązanie:

$$\frac{1\ \mathrm{mm}^2}{x} = \frac{25\cancel{\ 000\ 000\ 000\ 000}\ \cancel{\mathrm{mm}^2}}{24\cancel{\ 000\ 000\ 000\ 000}\ \cancel{\mathrm{mm}^2}}$$

$$\frac{1\ \mathrm{mm}^2}{x} = \frac{25}{24}$$

$$25x = 1\ \mathrm{mm}^2 \cdot 24\ /:25$$

$$x = 1\ \mathrm{mm}^2 \cdot \frac{24}{25} = 1\ \mathrm{mm}^2 \cdot \frac{96}{100} = 0{,}96\ \mathrm{mm}^2$$

Odp. Na mapie w wykonanej w skali 1 : 5 000 000 powierzchnia tego jeziora wynosi 0,96 mm^2.

Podejście równoważne do powyższego zadania:

Jezioro w rzeczywistości oraz to które jest narysowane na mapie, to matematycznie dwie figury podobne. Oznacza to, że dzieląc pole powierzchni rzeczywistego jeziora przez kwadrat skali podobieństwa, otrzymasz pole tego jeziora na mapie. Zatem wystarczyło wykonać tylko takie obliczenia:

$$x = 2400\ \mathrm{ha} : (5\ 000\ 000)^2 = 24\ 000\ 000\ 000\ 000\ \mathrm{mm}^2 : 25\ 000\ 000\ 000\ 000 = 0{,}96\ \mathrm{mm}^2$$

co jak widać jest dużo szybsze niż bawienie się skalą mianowaną i proporcjami. Wystarczyła jedna linijka obliczeń.

Temat: Porównanie skali z map i planów ze skalą przy podobieństwie figur.

Na lekcjach matematyki w gimnazjum również możesz spotkać się ze skalą. Jest ona omawiana przy tzw. podobieństwie oraz jednokładności figur. Zasadnicza różnica między skalą stosowaną na mapach i planach a skalą stosowaną przy podobieństwie figur tkwi w sposobie zapisywania. Mianowicie, skalę na mapach i planach zapisuje się przy pomocy dwukropka np. 1 : 100 zaś przy podobieństwie figur — za pomocą kreski ułamkowej. Zobacz porównanie:

skala na mapie lub planie	**skala przy podobieństwie figur**
1 : 1000	$k = \frac{1}{1000}$
1 : 250	$k = \frac{1}{250}$
30 : 1	$k = 30$
45 : 1	$k = 45$

Ćwiczenie: Zapisz poniższe skale w taki sposób, w jaki się to robi przy podobieństwie figur.

a) 1 : 25 b) 1 : 120 c) 1 : 10000 d) 80 : 1 e) 600 : 1

[Odp. $k = \frac{1}{25}$, $k = \frac{1}{120}$, $k = \frac{1}{10000}$, $k = 80$, $k = 600$.]

Dodatkowa rzecz jaką musisz wiedzieć, to taka, że w skali na mapach i planach zawsze musiała pojawić się liczba 1. Musiała ona stać albo przed dwukropkiem, albo za dwukropkiem. Przy podobieństwie figur liczba 1 nie musi występować. Może więc zdarzyć się, że skala będzie zapisana np. w taki sposób: $k = \frac{2}{5}$, $k = \sqrt{3}$, $k = \frac{3\sqrt{7}}{4}$, $k = 0{,}08$ itp.

Skalę zapisaną w taki nietypowy sposób należy rozumieć jako mnożenie długości odcinka w rzeczywistości przez podaną skalę w postaci ułamka. Zatem jeśli w rzeczywistości kwadrat ma bok o długości $a = 8\text{ cm}$, to po zastosowaniu skali $k = \frac{2}{5}$ będzie on mieć bok o długości $a' = 8\text{ cm} \cdot \frac{2}{5} = \frac{16}{5}\text{cm} = 3{,}2\text{ cm}$.

Ćwiczenie: Odcinek ma długość $a = 24\text{ cm}$. Oblicz jaką będzie mieć on długość po zastosowaniu podanej skali.

a) $k = \frac{1}{8}$ b) $k = \frac{2}{3}$ c) $k = \frac{3}{4}$ d) $k = \frac{4}{5}$ e) $k = \frac{5}{6}$ f) $k = 0{,}61$ g) $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$

[Odp. 3 cm; 16 cm; 18 cm; 19,2 cm; 20 cm; 14,64 cm; $12\sqrt{2}$ cm.]

To już w zasadzie wszystko jeśli chodzi o różnice między skalą na mapach i planach oraz skalą przy podobieństwie figur. Więcej o zastosowaniu skali przy podobieństwie i jednokładności figur znajdziesz w opracowaniu:

http://matematyka.strefa.pl/podobienstwo_i_jednokladnosc.rar

Inne opracowania które warto przeczytać:

- Jak obliczać zadania z procentami i promilami? http://matematyka.strefa.pl/procenty_i_promile.rar
- Jak rozwiązywać układy równań? http://matematyka.strefa.pl/uklady_rownan.rar
- wzory na potęgowanie i pierwiastkowanie http://matematyka.strefa.pl/wzory.pdf